AM110 - ESERCITAZIONI VII - VIII

23 - 25 OTTOBRE 2012

Esercizio svolto 1. Verificare i seguenti limiti usando la definizione:

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$;

b) $\lim_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n^2-1}\right) = 0$;

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n\sin n}{3n^2+\cos n} = \frac{1}{3}$;

d) $\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 - n\sin n\right) = +\infty$.

Soluzione.

a) Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:

$$\left|\frac{n^2+4}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Infatti

$$\left|\frac{n^2+4}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{4n^2+6},$$

quindi basterà scegliere $N_0 > \max\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\varepsilon} - 6},\, 0\right\}$.

b) Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:

$$\left|n - \sqrt{n^2-1}\right| < \varepsilon.$$

Osserviamo che

$$\left|n - \sqrt{n^2-1}\right| = n - \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}} < \frac{1}{n},$$

quindi sarà sufficiente scegliere $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

c) Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:

$$\left|\frac{n^2 - n\sin n}{3n^2+\cos n} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2 - n\sin n}{3n^2+\cos n} - \frac{1}{3}\right| &= \frac{|3n\sin n + \cos n|}{|9n^2+3\cos n|} \leq \\ &\leq \frac{3n|\sin n| + |\cos n|}{9n^2+3\cos n} \leq \\ &\leq \frac{3n+1}{9n^2-3} \leq \\ &\leq \frac{3n+\sqrt{3}}{9n^2-3} = \\ &= \frac{1}{3n-\sqrt{3}},\end{aligned}$$

quindi basta scegliere $N_0 > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{3}\right)$.

d) Vogliamo dimostrare che per ogni $M > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:

$$n^2 - n\sin n > M.$$

Osserviamo che

$$n^2 - n\sin n > n^2 - n = n(n-1) > (n-1)^2,$$

quindi basterà scegliere $N_0 > 1 + \sqrt{M}$.

Esercizio svolto 2. Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che:

(a) $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$;
(b) $|b_n| < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

(*i*) Esiste $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$.

(*ii*) Esiste N tale che $2a_n - b_n > 0$ per ogni $n > N$.

(*iii*) Esiste N tale che $a_n + b_n > 0$ per ogni $n > N$.

(*iv*) Esiste K tale che $Ka_n + b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione.

(*i*) Falso. Ad esempio, basta considerare $a_n \equiv 1$ e $b_n = (-1)^n$. La successione $a_n + b_n$ non ha limite in quanto vale 0 per gli n dispari e 2 per gli n pari.

(*ii*) Vero. Dal momento che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, possiamo dedurre che esiste $N > 0$ tale che

$$\frac{1}{2} < a_n < \frac{3}{2} \qquad \forall\, n > N.$$

Quindi, usando che $|b_n| < 1$, possiamo dedurre che:

$$2a_n - b_n > 0 \qquad \forall\, n > N.$$

(*iii*) Falso. Basta scegliere $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $b_n = -1 + \frac{1}{2n}$. Chiaramente queste due successioni soddisfano le ipotesi (a) e (b). In particolare:

$$a_n + b_n = 1 - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2n} < 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(*iv*) Procedendo come in (*ii*) possiamo dedurre che esiste N tale che se $K > 2$:

$$Ka_n + b_n > 0 \qquad \forall\, n > N.$$

Rimane da considerare cosa succede per i primi N termini della successione. Se $i = 1, \dots, N$ si ha (useremo il fatto che $a_n > 0$ per ogni n):

$$Ka_i + b_i > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad K > -\frac{b_i}{a_i}.$$

Quindi, basterà scegliere $K > \max\left\{2, -\frac{b_1}{a_1}, \dots, -\frac{b_n}{a_n}\right\}$.

Esercizio svolto 3. Calcolare i seguenti limiti:

(1) $\lim_{n\to+\infty}(e^n - 2^n)$
(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+1}{3^n+1}$
(3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n}$
(4) $\lim_{n\to+\infty}(n - \log n)$
(5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-4^n}{3^n-n!}$
(6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!+2^n}{(n+1)!}$
(7) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{A^n + B^n}$, con $A, B > 0$
(8) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)$
(9) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi\, n - 2^{-n}}{\log n - 2n}$
(10) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 - \sin n}{2n + (-1)^n}$
(11) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4 - n\arctan n}{2\pi n^4 - n^3 + n^2 + 2}$
(12) $\lim_{n\to+\infty} n\sin(\pi\, n)$
(13) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan n}{n + \arctan(n-1)}$
(14) $\lim_{n\to+\infty} \frac{6\cos n - n}{2\tan(1/n) + 2n}$
(15) $\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{n^2+1}{1-n}\right)$
(16) $\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\log n} - n^2\right)$
(17) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 - \sin n}{2n^3 + (-1)^n - 1}$
(18) $\lim_{n\to+\infty} (n - n\arctan n)$
(19) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^3+1)}{\log(2n^5-8)}$
(20) $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n^2+n}$

Soluzione.

(1) $+\infty$
(2) 0
(3) 1
(4) $+\infty$
(5) 0
(6) 0
(7) $\max\{A, B\}$
(8) $\frac{1}{2}$
(9) $-\frac{\pi}{2}$
(10) $+\infty$

(11) $\frac{3}{2\pi}$
(12) 0
(13) 0
(14) $-1/2$
(15) $-\frac{\pi}{2}$
(16) $+\infty$
(17) $1/2$
(18) $-\infty$
(19) $3/5$
(20) 1