AM110 - ESERCITAZIONI V - VI

16 - 18 OTTOBRE 2012

Esercizio svolto 1. Dimostrare che ogni insieme finito ha un massimo ed un minimo.

Soluzione.
Sia $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$. Dimostriamo che A ha un massimo (si procede in maniera analoga per il minimo).
Innanzitutto, A è limitato superiormente. Se così non fosse, infatti, per ogni $M \in \mathbb{R}$ dovrebbe esistere un elemento di A maggiore di M. Partendo da $b_0 = a_1$, si potrebbe scegliere $b_1 \in A$ tale che $b_1 > b_0$. Iterando l'argomento si otterrebbe una successione di elementi $b_n \in A$ tale che $b_n > b_{n-1}$. Questi elementi sarebbero ovviamente distinti, e ciò contraddirebbe il fatto che A è un insieme finito.

Sia $S = \sup A$. Vogliamo dimostrare che si tratta di un massimo, cioè che $S \in A$. Supponiamo per assurdo che $S \notin A$. Quindi $\delta_i := S - a_i > 0$ per ogni $a_i \in A$; scegliamo un $\varepsilon < \delta_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Segue dalla definizione di estremo superiore che $S - \varepsilon$ non può essere un maggiorante, quindi esiste $a_j \in A$ tale che $S - \varepsilon \leq a_j$. Quindi:

$$S - \varepsilon \leq a_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta_j = S - a_j < \varepsilon$$

che è chiaramente una contraddizione (avevamo scelto $\varepsilon < \delta_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$). Questo conclude la dimostrazione che $S \in A$ e quindi si tratta di un massimo.

Esercizio svolto 2. Siano A e B due insiemi. Definiamo

$$A + B := \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Dimostrare che:

i) se A e B sono limitati superiormente, allora anche $A + B$ lo è e si ha:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B\,.$$

ii) Se A e B sono limitati inferiormente, allora anche $A + B$ lo è e si ha:

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B\,.$$

Soluzione.
Dimostriamo soltanto (i); la dimostrazione di (ii) è analoga.
Sia $\alpha = \sup A$ e $\beta = \sup B$. Vogliamo dimostrare che $\alpha + \beta$ è l'estremo superiore di $A + B$. Infatti:

- $\alpha + \beta$ è un maggiorante per $A + B$. Infatti, α è un maggiorante per A e β è un maggiorante per B, quindi:

$$\alpha + \beta \geq a + b \qquad \forall\, a \in A, \ b \in B.$$

- Dimostriamo che $\alpha + \beta$ è il più piccolo dei maggioranti per $A + B$. Sia $\varepsilon > 0$, dimostriamo che $\alpha + \beta - \varepsilon$ non può essere un maggiorante. Infatti:

$$\alpha + \beta - \varepsilon = (\alpha - \frac{\varepsilon}{2}) + (\beta - \frac{\varepsilon}{2}) \leq \overline{a} + \overline{b} \qquad \exists\, \overline{a} \in A, \ \overline{b} \in B.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che α è il più piccolo dei maggioranti per A (quindi esiste $\overline{a} \in A$ tale che $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{a}$) ed in maniera analoga che β è il più piccolo dei maggioranti per B (quindi esiste $\overline{b} \in B$ tale che $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{b}$).

Esercizio svolto 3. Dimostare che ogni polinomio di terzo grado ha almeno una radice reale.

Soluzione.
Possiamo assumere che il polinomio sia della forma $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. È sufficiente dimostrare che esistono $s < t$ tali che $P(s) < 0$ e $P(t) > 0$. Dimostriamo l'esistenza di s tale che $s^3 + as^2 + bs + c > 0$. In particolare, possiamo cercare tale valore nel semi–asse positivo $s > 0$. Si osservi che se $s > 1 - a$, allora:

$$\begin{aligned} s^3 + as^2 + bs + c &= s \cdot s^2 + as^2 + bs + c > (1-a) \cdot s^2 + as^2 + bs + c = \\ &= s^2 + bs + c. \end{aligned}$$

Se assumiamo che $s > 1 - b$, si ottiene:

$$s^2 + bs + c > (1-b)s + bs + c = s + c.$$

In particolare, se $s > -c$ si avrà $s + c > 0$. In conclusione:

$$\text{se } s > \max\{0, 1-a, 1-b, -c\} \qquad \Longrightarrow \qquad P(s) > 0.$$

Dimostriamo ora l'esistenza di t tale che $P(t) < 0$.
Vogliamo trovare un valore di t per cui $t^3 + at^2 + bt + c < 0$. In particolare, possiamo cercare tale valore nel semi–asse negativo $t < 0$. Si osservi che, se $t < -1 - a$, allora

$$\begin{aligned} t^3 + at^2 + bt + c &= t \cdot t^2 + at^2 + bt + c < (-1-a)t^2 + at^2 + bt + c = \\ &= -t^2 + bt + c. \end{aligned}$$

Se assumiamo che $t < b - 1$, si ottiene:

$$-t^2 + bt + c < -(b-1)t + bt + c = t + c.$$

In particolare, se $t < -c$ si avrà $t + c < 0$. In conclusione:

$$\text{se } t < \min\{0, -1-a, b-1, -c\} \qquad \Longrightarrow \qquad P(t) < 0.$$

Esercizio svolto 4. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, definiamo:

- la parte intera di x:
$$[x] := \sup\{n \in \mathbb{Z} :\ n \leq x\} = \max\{n \in \mathbb{Z} :\ n \leq x\}$$
- la parte frazionaria di x:
$$\{x\} := x - [x].$$

i) Dimostrare che $[x] \leq x < [x] + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, $[x] = x$ se e solo se $x \in \mathbb{Z}$. Disegnare il grafico di $[x]$.
ii) Dimostrare che $0 \leq \{x\} < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, $\{x\} = 0$ se e solo se $x \in \mathbb{Z}$. Disegnare il grafico di $\{x\}$.
iii) Provare che:
$$[-x] = \begin{cases} -[x] & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$
iv) Provare che:
$$\{-x\} = \begin{cases} -\{x\} & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 1 - \{x\} & \text{se } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

v) Dimostrare che:

$$[x+y] = \begin{cases} [x]+[y] & \text{se } \{x\}+\{y\}<1 \\ [x]+[y]+1 & \text{se } \{x\}+\{y\}\geq 1. \end{cases}$$

Ricavare una rappresentazione analoga per $\{x+y\}$.

vi) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\{x\}\cdot\{1-x\} \leq \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Soluzione.

i) Denotiamo $I_x := \{n \in \mathbb{Z} : \ n \leq x\}$. Ovviamente segue dalla definizione di parte intera (come sup, in particolare massimo) che $[x] \in I_x$ e quindi è un intero e $[x] \leq x$. Inoltre $[x]+1 > x$, altrimenti $[x]+1$ sarebbe un elemento dell'insieme I_x, maggiore del massimo (contraddizione). Dimostriamo ora la seconda parte. Se $x \in \mathbb{Z}$, chiaramente $x \in I_x$ ed è un maggiorante (se $n \in I_x$, per definizione $n \leq x$); quindi $[x] := \sup I_x = x$. D'altro canto se $[x]=x$, x è un intero (in quanto $[x] \in \mathbb{Z}$).

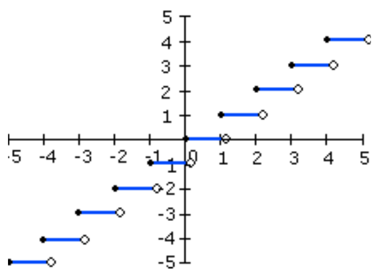

FIGURE 1

ii) Segue dalla definizione di parte frazionaria e dal punto (i) che

$$0 = [x]-[x] \leq \{x\} := x-[x] \leq [x]+1-[x] = 1.$$

In particolare $\{x\}=0$ se e solo se $[x]=x$; segue dal punto (i) che ciò è vero se e soltanto se $x \in \mathbb{Z}$.

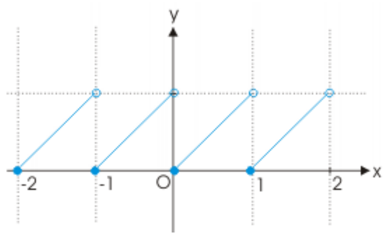

FIGURE 2

iii) Se $x \in \mathbb{Z}$, allora $-x \in \mathbb{Z}$ e quindi (segue dal punto (i)): $[-x] = -x = -[x]$. Supponiamo ora che $x \notin \mathbb{Z}$. Dal punto (i) sappiamo che $[x] < x < [x]+1$, che equivale a dire: $-[x]-1 < -x < -[x]$. Quindi segue facilmente che

$$-[x]-1 = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leq -x\} =: [-x].$$

iv) Si dimostra facilmente usando (iii) e la definizione di parte frazionaria.

v) Osserviamo che:

$$\begin{aligned} [x+y] &= (x+y)-\{x+y\} = \\ &= x-\{x\}+y-\{y\}+\Big(\{x\}+\{y\}-\{x+y\}\Big) = \\ &= [x]+[y]+\Big(\{x\}+\{y\}-\{x+y\}\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

Da quest'uguaglianza (e dal fatto che la parte intera è, per definizione, un intero) possiamo dedurre che:

$$\{x\}+\{y\}-\{x+y\} \in \mathbb{Z}.$$

- Se $\{x\}+\{y\}<1$, allora (usando il punto (ii)) si verifica facilmente che $-1<\{x\}+\{y\}-\{x+y\}<1$. L'unico intero in questo intervallo è 0. Quindi, sostituendo in (2) si ottiene $[x+y]=[x]+[y]$.
- In maniera analoga, se $\{x\}+\{y\}\geq 1$, allora (usando il punto (ii)) si verifica facilmente che $0<\{x\}+\{y\}-\{x+y\}<2$. L'unico intero in questo intervallo è 1. Quindi, sostituendo in (2) si ottiene$[x+y]=[x]+[y]+1$.

Utilizzando la definizione di parte frazionaria e le uguaglianze appena dimostrate, si ricava:

$$\{x+y\} = \begin{cases} \{x\}+\{y\} & \text{se } \{x\}+\{y\}<1 \\ \{x\}+\{y\}-1 & \text{se } \{x\}+\{y\}\geq 1. \end{cases}$$

vi) Se $x\in\mathbb{Z}$, la disuguaglianza (1) è ovviamente vera. Consideriamo il caso $x\notin\mathbb{Z}$. Usando i punti (i), (iv) ed osservando che $\{1\}+\{-x\}=\{-x\}<1$, si ottiene:

$$\{1-x\} = \{1+(-x)\}=\{1\}+\{-x\}=\{-x\}=1-\{x\}.$$

Quindi, (1) diventa (per $x\notin\mathbb{Z}$):

$$\frac{1}{4}\geq\{x\}\cdot\Big(1-\{x\}\Big)=\{x\}-\{x\}^2 \qquad \text{per } 0<\{x\}<1.$$

Si verifica facilmente che questa disuguaglianza è vera. Infatti, la funzione $f(t)=-t^2+t$ rappresenta un parabola concava con vertice in $t=\frac{1}{2}$; di conseguenza $\max f(t)=\frac{1}{4}$.
Questo permette di concludere che (1) è verificata.

Esercizio svolto 5. Usando la definizione di limite, dimostare che:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)}{n^2}=0.$$

Soluzione.
Cominciamo da (a). Vogliamo dimostrare che:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\, N_\varepsilon\in\mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\, n\geq N_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad \left|\frac{n}{2n+3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

Osserviamo che:

$$\left|\frac{n}{2n+3}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n-3}{2(2n+3)}\right| = \frac{3}{4n+6}.$$

Quindi:

$$\left|\frac{n}{2n+3}-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4n+6} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}.$$

Basta scegliere un intero positivo $N_\varepsilon > \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}$.

Dimostriamo ora (b). Vogliamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad \left|\frac{\sin\left(e^{\pi \cos n}\right)}{n^2}\right| < \varepsilon.$$

Osserviamo che:

$$\left|\frac{\sin\left(e^{\pi \cos n}\right)}{n^2}\right| = \frac{\left|\sin\left(e^{\pi \cos n}\right)\right|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Quindi:

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{\sin\left(e^{\pi \cos n}\right)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Basta scegliere un intero positivo $N_\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.