AM110 - ESERCITAZIONI III - IV

9 -11 OTTOBRE 2012

Esercizi sull'estremo superiore ed inferiore

Esercizio svolto 1. Dire se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente o superiormente ed, in caso affermativo, trovare l'estremo inferiore o l'estremo superiore. Dire se si tratta di minimi o massimi.

i) $A := \left\{\frac{n-1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$;
ii) $B := \left\{\frac{2n}{n^2+1} \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$;
iii) $C := \left\{\frac{(-1)^n}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$;
iv) $D := \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$
v) $E := \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\right\}$ and $E' := \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\right\}$;
vi) $F := \{x \in \mathbb{R} :\; x \cdot |x| > 2\}$.
vii) $G := \left\{n \in \mathbb{R} :\; \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{n^4}{n^4+1}\right)\right\}$.

Soluzione.

i) Osserviamo che

$$A := \left\{\frac{n-1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

e che

$$0 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Quindi:
- A è limitato inferiormente da 0 (ogni $k \leq 0$ è un minorante per A). In particolare, poiché 0 è un minorante e $0 \in A$, allora $0 = \min A = \inf A$.
- A è limitato superiormente da 1 (ogni $k \geq 1$ è un maggiorante per A). Dimostriamo che 1 è il *più piccolo* dei maggioranti.
  Sia $\varepsilon > 0$; mostriamo che $1 - \varepsilon$ non può essere un maggiorante. Infatti:
  $$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$
  Quindi, per ogni $n > \frac{1}{\varepsilon}$ l'elemento $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ e di conseguenza non può essere un maggiorante.
  Conclusione: $\sup A = 1$. Osserviamo che 1 non è un massimo, in quanto $1 \notin A$ (infatti $1 - \frac{1}{n} \neq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

ii) Osservare che:

$$-1 \leq \frac{2n}{n^2+1} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

In particolare, è sufficiente dimostrare:

$$\left|\frac{2n}{n^2+1}\right| \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Dimostriamo che vale questa disuguaglianza:

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n}{n^2+1}\right| = \frac{2|n|}{n^2+1} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} &\iff 2|n| \leq n^2+1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \\ &\iff n^2+1-2|n| \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \\ &\iff (|n|-1)^2 \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

che è chiaramente vero. Quindi 1 è un maggiorante per B e -1 un minorante. Di conseguenza B è limitato superiormente ed inferiormente. Inoltre, dal momento che $1 \in B$ e $-1 \in B$, possiamo concludere che sono anche il massimo ed il minimo:

$$\min B = \inf B = -1 \qquad e \qquad \max B = \sup B = 1.$$

iii) Inanzitutto osserviamo che

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Quindi,

$$-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenze -1 è un minorante ed 1 un maggiorante per C. Ne segue che C è limitato sia inferiormente che superiormente. In particolare, dal momento che $-1 \in C$ (basta prendere $n = 1$) e -1 è un minorante, possiamo concludere che $\min C = \inf C = -1$.
Calcoliamo ora l'estremo superiore. Come abbiamo detto 1 è un maggiorante, ma non è il più piccolo dei maggiorante. Infatti, si dimostra che anche $\frac{1}{2}$ è un maggiorante:

– Se n è dispari, $\frac{(-1)^n}{n} < 0 < \frac{1}{2}$;
– Se n è pari (in particolare $n \geq 2$), allora

$$\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{(in quanto } n \geq 2).$$

Inoltre, $\frac{1}{2} \in C$ (basta prendere $n = 2$), quindi $\max C = \sup C = \frac{1}{2}$.

iv) Denotiamo $d_n := (-1)^n \frac{n-1}{n} = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Osserviamo che 1 è un maggiorante e -1 è un minorante. Infatti:

$$|d_n| = 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \iff \qquad -1 \leq d_n \leq 1.$$

Dimostriamo che si tratta dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore.

– Dimostriamo che $\sup D = 1$. Dobbiamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che $d_{n_0} \geq 1 - \varepsilon$. Assumiamo che n_0 sia pari, per esempio $n_0 = 2k_0$. Allora, bastera scegliere k_0 in maniera che:

$$d_{2k_0} = \frac{2k_0 - 1}{2k_0} = 1 - \frac{1}{2k_0} > 1 - \varepsilon \qquad \iff \qquad k_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

– In maniera simile (considerando n dispari), si dimostra che $\inf D = -1$.

Osserviamo che non si tratta né di un massimo, né di un minimo.

v) Osservare che $E := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. È facile verificare che:

$$\min E = \inf E = -\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad \max E = \sup E = \sqrt{2}.$$

In maniera simile,

$$E' := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}.$$

Si può dimostrare che $\sup E' = \sqrt{2}$ e $\inf E' = -\sqrt{2}$. Questa volta non si tratta né di un massimo, né di un minimo (in quanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Dimostriamo ad esempio che $\sup E' = \sqrt{2}$; la dimostrazione per l'estremo inferiore è speculare.

- Ovviamente $\sqrt{2}$ è un maggiorante: se $x \in E$, allora $x^2 \leq 2$ e quindi $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.
- Dimostriamo che è il più piccolo dei maggioranti. Sia $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare $x \in E'$ tale che $x > \sqrt{2} - \epsilon$. Consideriamo il seguente insieme:

$$I := \left(\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Se $I = \emptyset$, allora vuol dire che $\sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq -\sqrt{2}$. Quindi, possiamo prendere un qualsiasi $x \in E'$ e si avrà $x > \sqrt{2} - \varepsilon$.
Se invece $I \neq \emptyset$, allora I sarà un intervallo aperto. Scegliamo quindi un qualsiasi razionale $x \in I$ e questo soddisferà la relazione $x > \sqrt{2} - \epsilon$.

vi) Si dimostra che

$$F := \{x \in \mathbb{R} : \ x \cdot |x| > 2\} = (2, +\infty).$$

Di conseguenza, $\inf F = 2$ (non è un minimo) e $\sup F = +\infty$ (l'insieme non è limitato superiormente).

Esercizio aggiuntivo 1. Dire se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente o superiormente ed, in caso affermativo, trovare l'estremo inferiore o l'estremo superiore. Dire se si tratta di minimi o massimi.

i) $A := \{(-1)^n n + \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$;
ii) $B := \{n^2 - n : \ n \in \mathbb{Z}\}$;
iii) $C := \{n^2 - 5n + 3 : \ n \in \mathbb{N}\}$;

Esercizio svolto 2. Sia A un insieme limitato superiormente. Definiamo $-A := \{-a : \ a \in A\}$. Dimostrare che $\inf A = -\sup(-A)$.

Soluzione. Denotiamo $\ell = \inf A$. Segue dalla definizione di estremo inferiore che:

a1) $\ell \leq a$ per ogni $a \in A$;
a2) per ogni $m > \ell$, esiste un elemento $\bar{a} \in A$ tale che $m > \bar{a}$.

Dimostriamo che $-\ell$ è l'estremo superiore di $-A$:

- segue da (a1) che $-\ell \geq -a$ per ogni $-a \in -A$;
- sia $M < -\ell$; si cha che $-M > \ell$, quindi segue da (a2) che esiste $\bar{a} \in A$ tale che $-M > \bar{a}$. Di conseguenza $M < -\bar{a}$ e $-\bar{a} \in -A$, quindi M non può essere un maggiorante.

Questo dimostra che $-\ell$ è il più piccolo maggiorante per $-A$ e quindi è l'estremo superiore. □

Esercizio svolto 3. Sia A un insieme limitato. Si definisca il *diametro di* A nel seguente modo:

$$\text{diam } A := \sup\{|x-y| : \ x, y \in A\}.$$

Dimostrare che diam $A = \sup A - \inf A$.

Soluzione. Siano $x, y \in A$. Possiamo assumere che $x \geq y$ (altrimenti basta invertire i ruoli). Segue dalla definizione di estremo superiore ed inferiore che $\sup A \geq x$ e $\inf A \leq y$. Quindi:

$$\sup A - \inf A \geq x - y = |x-y| \qquad \forall\, x, y \in A.$$

Quindi $\sup A - \inf A$ è un maggiorante dell'insieme $\{|x-y| : \ x, y \in A\}$. Poiché l'estremo superiore è il più piccolo dei maggioranti, otteniamo:

$$\sup A - \inf A \geq \sup\{|x-y| : \ x, y \in A\} =: \text{diam } A\,.$$

Vogliamo dimostrare ora che $\sup A - \inf A \leq \text{diam } A$. Supponiamo per assurdo che $\sup A - \inf A > \text{diam } A$. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$\text{diam } A < \sup A - \inf A - 2\varepsilon = (\sup A - \varepsilon) - (\inf A + \varepsilon). \tag{1}$$

Segue dalla definizione di sup ed inf che:

$$\exists\, \bar{x} \in A \text{ tale che } \sup A - \varepsilon < \bar{x} \qquad \text{e} \qquad \exists\, \bar{y} \in A \text{ tale che } \inf A + \varepsilon > \bar{y}.$$

Quindi sostituendo nella disuguaglianza (1) ottieniamo:

$$\text{diam } A < (\sup A - \varepsilon) - (\inf A + \varepsilon) < \bar{x} - \bar{y} \leq |\bar{x} - \bar{y}| \leq \text{diam } A,$$

che è una chiara contraddizione. Questo conclude la dimostrazione che diam $A \geq \sup A - \inf A$. $\square$