AM110 - ESERCITAZIONI XIX - XX

11 DICEMBRE 2012

Esercizio svolto 1. Calcolare i seguenti limitii:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{\arctan x^2}$;

c) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\tan x}$;

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos^2 x)^{\tan^2 x}$;

e) $\lim_{x\to \infty} \frac{\log(3+\sin x)}{x^3}$;

f) $\lim_{x\to +\infty} x \sin \frac{1}{x}$;

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$;

h) $\lim_{x\to +\infty} \left[x e^x \sin\left(e^{-x} \sin \frac{2}{x}\right)\right]$;

i) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2 \sin x + \sin^2 x}{x^4 + x^3 + x \sin x}$;

l) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \sin x}{\log x}$;

m) $\lim_{x\to 0} (\sin x^2)^{\frac{1}{\log x^2}}$;

n) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x \cdot (e^{\cos x} - 1))$.

Soluzione.

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x\,(1-\cos x)}{x^3} = \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{(1-\cos x)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(e^x-e^{-x})-1}{\arctan x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{[\cos(e^x-e^{-x})-1]}{(e^x-e^{-x})^2}\cdot\frac{(e^x-e^{-x})^2}{\arctan x^2}\right)=\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\arctan x^2}\right)=\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2=\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}e^{-2x}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)^2=\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}4\cdot\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2=\\
&= -2.
\end{aligned}$$

c)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0}e^{\tan x\cdot\log(1+x)}=1.$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 x)^{\tan^2 x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{\cos^x}}\right]^{\cos^2 x\cdot\tan^2 x}=\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{\cos^x}}\right]^{\sin^2 x}=e.
\end{aligned}$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(3+\sin x)}{x^3} = 0.$$

f)

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$$

g)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{\sin x\,(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x\,(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=1.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left[xe^x\sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)\right] &= \lim_{x\to+\infty}\left[xe^x\frac{\sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)}{e^{-x}\sin\frac{2}{x}}\cdot\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)\right]=\\
&= \lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{2}{x}=\\
&= \lim_{x\to+\infty}2\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=2.
\end{aligned}$$

i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2 \sin x + \sin^2 x}{x^4 + x^3 + x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \left(x + \sin x + \frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}{x^2 \left(x^2 + x + \frac{\sin x}{x}\right)} = $$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x + \frac{\sin^2 x}{x^2}}{x^2 + x + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

l)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \sin x}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\log \sin x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\log x} \right) = 1.$$

m)

$$\lim_{x\to 0} (\sin x^2)^{\frac{1}{\log x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\log x^2}\cdot \log(\sin x^2)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{x^2}{\log x^2}\cdot \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot \frac{\log(\sin x^2)}{\sin x^2}} = e.$$

n)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan x \cdot (e^{\cos x} - 1)\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\sin x \cdot \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} \right) = 1.$$

Esercizio svolto 2 (Funzioni iperboliche). Si definiscano le seguenti funzioni iperboliche:

- il *Seno iperbolico*:
$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
- il *Coseno iperbolico*:
$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

i) Dimostrare che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
ii) Trovare il dominio e il codominio di queste funzioni. Studiarne il segno, le eventuali simmetrie, la crescenza o la decrescenza, e disegnare un grafico approssimativo.
iii) Trovare le rispettive funzioni inverse (dove definite). Si possono esprimere attraverso funzioni elementari note?

Soluzione.

i) Si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \\ &= 1.\end{aligned}$$

ii) Entrambe le funzioni sono chiaramente definite su tutto $\mathbb{R}$; quindi il dominio è tutto l'asse reale.

– Seno iperbolico:

∗ È una funzione dispari; infatti:

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

∗ Poiché $e^x > e^{-x}$ per ogni $x > 0$, allora $\sinh x > 0$ per ogni $x > 0$. Trattandosi di una funzione dispari, $\sinh x < 0$ per $x < 0$. Inoltre, $\sinh 0 = 0$.

∗ Si verifica facilmente che $\sinh x$ è una funzione crescente. Infatti, e^x è crescente e e^{-x} decrescente (quindi $-e^{-x}$ è crescente).

∗ Calcoliamo i limiti per x che tende a infinito:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \pm\infty.$$

∗ Il codominio è quindi $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

∗ La funzione $\sinh x$ è globalmente iniettiva e quindi globalmente invertibile.

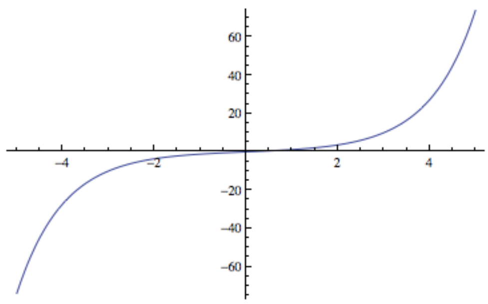

Figure 1

– Coseno iperbolico:

∗ È una funzione pari; infatti:

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

∗ Poiché $e^x > 0$ per ogni x, allora $\cosh x > 0$ per ogni x.

∗ Si verifica che $\cosh x$ è una funzione decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$. Poiché si tratta di una funzione pari, è sufficiente verificare che è crescente per $x > 0$.
Osserviamo, infatti, che per il punto i), $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$. Poiché $\sinh x$ è una funzione crescente per $x > 0$, possiamo concludere che anche $\cosh x$ lo è.

∗ Calcoliamo i limiti per x che tende a infinito:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = +\infty.$$

∗ La funzione $\cosh x$ ha quindi un minimo per $x = 0$, dove $\cosh 0 = 1$. Quindi il codominio è $\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$.

* La funzione $\cosh x$ non è globalmente iniettiva; infatti per ogni $y_0 > 1$ esistono esattamente due valori $-x_0 < 0 < x_0$ tale che $\cosh(x_0) = \cosh(-x_0) = y_0$. Quindi non è globalmente invertibile, ma ha due inverse locali: una a valori in $[0, +\infty)$ ed una a valori in $(-\infty, 0]$. Queste due inverse sono una l'opposto dell'altra (vista la parità della funzione).

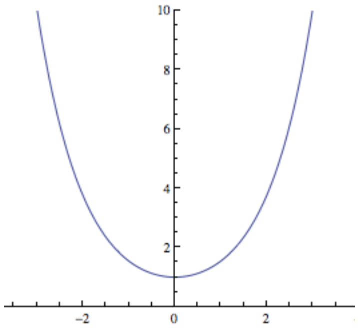

FIGURE 2

iii) Trovare le rispettive funzioni inverse (dove definite). Si possono esprimere attraverso funzioni elementari note?

– Arcoseno iperbolico.

Abbiamo visto nel punto ii) che la funzione seno iperbolico ammette un'inversa globale, che chiameremo *arcoseno iperbolico*. In particolare:

$$\text{arcsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ed il suo grafico avrà la seguente forma (si può ottenere, ad esempio, riflettendo il grafico del seno iperbolico rispetto alla bisettrice $y = x$):

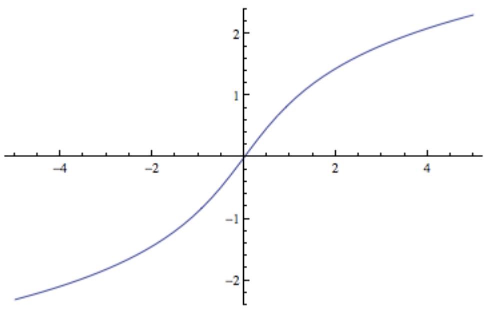

FIGURE 3

Cerchiamo ora di esprimere $x = \text{arcsinh}\, \mathrm{y}$ attraverso funzioni elementari noti. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} y &= \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \\ &= \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} = \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}, \end{aligned}$$

che è equivalente a

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Risolvendo quest'equazione di secondo grado in e^x, otteniamo due soluzioni: $y \pm \sqrt{y^2+1}$. Poiché e^x è sempre positivo, dobbiamo scegliere l'unica soluzione positiva:

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}.$$

Quindi:

$$x = \operatorname{arcsinh} \mathrm{y} = \log\left(\mathrm{y} + \sqrt{\mathrm{y}^2+1}\right).$$

– Arcocoseno iperbolico.

Abbiamo visto nel punto ii) che la funzione coseno iperbolico non ammette un'inversa globale, ma due inverse locali una a valori in $[0, +\infty)$, che denoteremo $\operatorname{arccosh}_+$, ed una a valori in $(-\infty, 0]$, che denoteremo $\operatorname{arccosh}_-$. In particolare:

$$\operatorname{arccosh}_+ : [1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$$

e

$$\operatorname{arccosh}_- : [1, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0].$$

Poiché la funzione cosh è pari, segue facilmente che per ogni $y \geq 1$ si ha:

$$\operatorname{arccosh}_+(\mathrm{y}) = -\operatorname{arccosh}_-(\mathrm{y}).$$

Il grafico di $\operatorname{arccosh}_+$ avrà la seguente forma (si può ottenere, ad esempio, riflettendo il grafico del coseno iperbolico – ristretto al semiasse positivo – rispetto alla bisettrice $y = x$); quello di $\operatorname{arccosh}_-$ si ricava in maniera analoga od usando la relazione $\operatorname{arccosh}_+(\mathrm{y}) = -\operatorname{arccosh}_-(\mathrm{y})$.

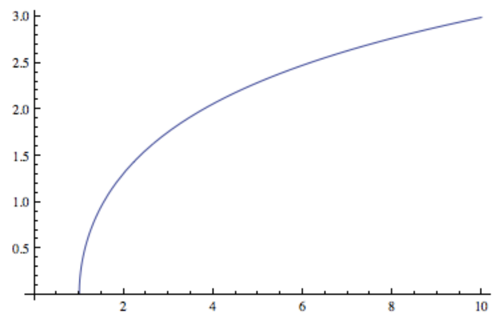

FIGURE 4

Cerchiamo ora di esprimere $x = \operatorname{arccosh}_\pm \mathrm{y}$ attraverso funzioni elementari note. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} y &= \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \\ &= \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \\ &= \frac{e^{2x}+1}{2e^x}, \end{aligned}$$

che è equivalente a

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

Risolvendo quest'equazione di secondo grado in e^x, otteniamo due soluzioni: $y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, dove la radice è ben definita in quanto $y \geq 1$. Entrambe le soluzioni sono positive:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Quindi:

$$x = \operatorname{arccosh}_{\pm}\mathrm{y} = \log\left(\mathrm{y} \pm \sqrt{\mathrm{y}^2 - 1}\right).$$

Osserviamo infatti che:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccosh}_{-}\mathrm{y} &= \log\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) = \\
&= \log\left(\frac{y^2 - (y^2 - 1)}{y + \sqrt{y^2 - 1}}\right) = \\
&= \log\left(\frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}\right) = \\
&= -\log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) = -\operatorname{arccosh}_{+}\mathrm{y}.
\end{aligned}$$

Esercizio aggiuntivo 1. Si definisca la *tangente iperbolica* come

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Trovare il dominio e il codominio. Studiarne il segno, le eventuali simmetrie, la crescenza o la decrescenza, e disegnare un grafico approssimativo.
Trovarne l'inversa; si può esprimere attraverso funzioni elementari note?