Tutorato di AM110 - Soluzioni

A.A. 2012-2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 1: Principio di Induzione, Estremo inferiore e superiore

---

Soluzione Esercizio 1.1. Proviamo solo i punti (1.1.4) e (1.1.5).

(1.1.4) La base induttiva è banalmente verificata; verifichiamo quindi il passo induttivo, assumendo quindi di aver verificato l'ipotesi fino a $n \geq 1$, e proviamola per $n+1$. Abbiamo

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{(a)}{=} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2}_{=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\text{ per (1.1.1)}} + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2\left(n^2+4n+1\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2.$$

dove in (a) abbiamo usato l'ipotesi induttiva.

(1.1.5) Come nel punto precedente, la base induttiva è di verifica immediata. Assumiamo quindi che l'ipotesi sia vera fino a $n \geq 1$, e proviamo per $n+1$: si ha

$$S_{2^{n+1}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}}_{\geq 1+\frac{n}{2},\text{ per ipotesi induttiva}} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geq \frac{1}{2^{n+1}}} \geq$$

$$\geq 1 + \frac{n}{2} + \left(2^{n+1} - 2^n\right)\frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Soluzione Esercizio 1.2. Il passo induttivo non è sempre valido: infatti, nella (falsa) dimostrazione si sfrutta il fatto che l'intersezione tra i due insiemi V' e V'' sia non vuota, il che però non è vero quando $n = 1$. Cioè, il passo induttivo non è verificato per ogni n, e quindi l'induzione non può essere applicata.

Soluzione Esercizio 1.3.
Diamo solo i risultati, omettendo gli svolgimenti:

- $\sup A = 1$, $\inf A = 0$;
- $\sup B = 1$, $\inf B = 0$;
- $\sup C = \frac{1}{3}$, $\inf C = -\frac{1}{2}$;
- $\sup D = 3$, $\inf D = -6$;
- $\sup E = 3$, $\inf E = 0$.

Soluzione Esercizio 1.4. Consideriamo

$$A := \left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B := \left\{\frac{n-1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Si verifica facilmente (lo si faccia!) che $\sup A = 1$ e $\sup B = 1$, e (ovviamente) $\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $A \sharp B = \{1\}$, di conseguenza $\sup A\sharp B = 1 < \sup A + \sup B = 2$. Ora, prendiamo

$$A := \left\{n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B := \left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\},$$

quindi $\sup A = +\infty$, $\sup B = 1$. Ma, di nuovo, $A \circ B = \{1\}$, e quindi $\sup A \circ B = 1 < +\infty = \sup A \sup B$.
Notiamo ora che la disuguaglianza $\sup A\sharp B \leq \sup A + \sup B$ è vera: infatti, preso $a_n + b_n \in A\sharp B$, $a_n \leq \sup A$ e $b_n \leq \sup B$; non è invece verificata la disuguaglianza $\sup A \circ B \leq \sup A \sup B$: infatti, se consideriamo $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $a_1 := -1$ e $a_n := 0$ per ogni $n > 1$, e prendiamo $B = A$, allora $\sup A \circ B = 1$, mentre $\sup A \sup B = 0 \cdot 0 = 0$.

Soluzione Esercizio 1.5.

(1.5.1) Se $n = 1$, allora $\left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 = 1!$, e quindi la base induttiva è verificata. Supponiamo quindi che l'ipotesi sia vera fino a $n \geq 1$, e proviamola per $n+1$:

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \frac{n+1}{e} = \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{e}\right)^n \frac{n+1}{e} = \underbrace{\left(\frac{n}{e}\right)^n}_{<n!,\text{ per l'ipotesi induttiva}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{<e,\text{ per definizione}} \cdot \frac{n+1}{e} <$$

$$< n! \cdot e \cdot \frac{n+1}{e} = (n+1)!.$$

(1.5.2) La base induttiva si verifica con un calcolo immediato. Poi, notiamo che τ, φ sono radici del polinomio $x^2 - x - 1$, e quindi $\tau^2 = \tau + 1$, $\varphi^2 = \varphi + 1$. Supponiamo quindi che l'ipotesi sia vera per $n \geq 1$, e proviamola per $n+1$:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = \frac{\tau^n - \varphi^n + \tau^{n-1} - \varphi^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Ma

$$\tau^n + \tau^{n-1} = \tau^{n-1}(\tau+1) = \tau^{n-1}\tau^2 = \tau^{n+1}$$

e, analogamente, $\varphi^n + \varphi^{n-1} = \varphi^{n+1}$, cioè la tesi.

(1.5.3) Proviamo che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{1.1}$$

Il caso $n = 1$ è di verifica immediata, poiché $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Andiamo quindi a verificare il passo induttivo; assumiamo quindi che l'ipotesi sia vera fino a n. Allora

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \overset{(a)}{=} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right\}}_{=:S_n} + \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1},$$

dove in (a) abbiamo usato l'identità (che dovreste aver verificato...) $\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}$. Andiamo quindi a valutare la somma S_n: con un cambio di indici, possiamo scrivere

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \overset{\ell=k-1}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} - 1 \overset{(b)}{=} 2^n - 1,$$

dove in (b) abbiamo sfruttato l'ipotesi induttiva; ora, sempre per l'ipotesi induttiva, si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1 = 2^n - 1.$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^n - 1 + 2^n - 1 + 1 + 1 = 2^{n+1},$$

che è appunto la (1.1). Proviamo ora l'identià

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}. \tag{1.2}$$

Come prima, la base induttiva si verifica con un semplice calcolo. Assumiamo quindi che l'ipotesi sia vera fino a n, e proviamola per $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1}}_{=:S_n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}_{=n2^{n-1},\text{ per l'ipotesi induttiva}} + n + 1.$$

Ma

$$S_n \overset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\binom{n}{j} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}}_{=n2^{n-1}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}}_{=2^n} -n-1 =$$

$$= n2^{n-1} + 2^n - n - 1.$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = n2^{n-1} + 2^n + n2^{n-1} = 2^n(n+1).$$

(1.5.4) La verifica della base induttiva è immediata. Proviamo ora che se l'ipotesi è vera fino a $n \geq 1$, allora è vera anche per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k}}_{=:S_n} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

Ora, effettuando il cambio di indici $j = k+1$, possiamo riscrivere la somma S_n come

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} \overset{j=k+1}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+j} - \frac{1}{n+1} \overset{(a)}{<} \frac{3}{4} - \frac{1}{n+1},$$

dove nel passaggio (a) abbiamo sfruttato l'ipotesi induttiva. Segue che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = S_n + \frac{1}{2(n+1)} < \frac{3}{4} \underbrace{- \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}}_{<0} < \frac{3}{4}.$$