Tutorato di AM110

A.A. 2012/2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 5: Ripasso e introduzione alle serie numeriche 2.

Esercizio 5.1. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

(5.1.1) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n^3-n}}$,

(5.1.2) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$,

(5.1.3) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+e^n}{n!}$,

(5.1.4) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\log(n)}}$,

(5.1.5) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\log(n!)}$,

(5.1.6) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n+17)}{(n+1)(n+2)(n+\sqrt{\pi})}$,

(5.1.7) $\sum_{n\geqslant 1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

(5.1.8) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\log(n))^{\log(n)}}$,

(5.1.9) $\sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{\log(\log(n))}{\log(n)}\right)^n$.

Esercizio 5.2. *Criterio di Leibniz*: sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty)$ decrescente. Allora

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Utilizzare il criterio di Leibniz per stabilire la convergenza delle seguenti serie:

(5.2.1) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\pi)}{n}$,

(5.2.2) $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$,

(5.2.3) $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n+1}{n^4}$.

Fornire un controesempio nel caso in cui la successione $\{a_n\}$ non sia decrescente.

Esercizio 5.3. Dimostrare per induzione che:

(5.3.1) $3^{n+1} \geqslant (n+1)^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(5.3.2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Esercizio 5.4. Calcolare (se esiste) il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni:

(5.4.1) $\frac{e^{\frac{1}{n}} - \cos(n)}{n}$,

(5.4.2) $n! \log\left(\cos(2n\pi) + \frac{1}{n!}\right)$.

Esercizio 5.5. Un aperto $U \subset \mathbb{R}$ si dice *regolare* se $U = \mathring{\overline{U}}$, cioè se coincide con l'interno della sua chiusura. Fornire un esempio di insieme aperto non regolare.

Esercizio 5.6. Provare che l'intersezione arbitraria di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$ non è in generale un insieme aperto, e dedurre quindi che l'unione arbitraria di chiusi non è in generale un chiuso.

Esercizio 5.7. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti, chiusi, né aperti, né chiusi e determinarne i punti di accumulazione:

(5.7.1) $A := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sin(x) = 0 \right\}$,

(5.7.2) $B := (-1, 0] \cup \left\{ 1 - \frac{1}{2n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$,

(5.7.3) $C := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, e^x \in (0,1) \right\}$.