

La formula di Coarea e alcune sue applicazioni

Andrea Filipponi e Dora Martucci

Teorema 1 (Formula di Coarea) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lipschitziana, $n \geq m$ e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ \mathcal{L}^n -misurabile. Allora

$$\int_A Jf dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy$$

La formula di coarea è una sorta di teorema di Fubini "curvilineo". Si consideri un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^2$. Applicando il teorema di Fubini a tale insieme per calcolare la sua misura (ovvero la sua area), si sommano tramite integrale le lunghezze delle sezioni verticali e tale somma rimane invariata se si sommano le lunghezze delle sezioni orizzontali. Nella formula di coarea, l'integrale a secondo membro è la somma di tutte le misure delle curve di livello¹, in generale non ortogonali agli assi, che intersecano A . Ricoprendo tutto A in questo modo non otteniamo la sua misura ma qualcosa di diverso che dipende dallo Jacobiano di f . In altre parole, lo Jacobiano della funzione induce su A una distorsione della sua misura. Per comprendere tale affermazione si rimanda all'esempio es.1 relativo al caso lineare.

Da questo momento in poi assumeremo sempre che

$$n \geq m$$

Al fine di dimostrare la validità di tale teorema si ricorre all'utilizzo di tre lemmi.

Lemma 1 Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ \mathcal{L}^n -misurabile. Allora

1. $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})$ è \mathcal{L}^m -misurabile e

$$2. \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\}) dy = [[L]] \mathcal{L}^n(A) \quad (*)$$

(*) Per il teorema di decomposizione polare si ha $L = S \circ O^*$ dove

$S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ simmetrica e

$O : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ortogonale.

Per definizione intenderemo $JL \equiv [[L]] \stackrel{def}{=} |\det S|$

DIM.

Caso 1: $\dim L(\mathbb{R}^n) = k < m$ (cioè L non è suriettiva)

Δ **Affermazione 1** $A \cap L^{-1}\{y\} = \emptyset$ q.o. $y \in \mathbb{R}^m$ rispetto alla misura \mathcal{L}^m .

Dim. Affermazione 1 Sia $Y := \{y \in \mathbb{R}^m \mid A \cap L^{-1}\{y\} \neq \emptyset\}$. Poiché $Y \subset$

¹Si parla di curve di livello nel caso in cui $m = 1$

$$L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{L}^m(Y) \leq \mathcal{L}^m(L(\mathbb{R}^n)) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}^m(Y) = 0.$$

(L'ultima disuguaglianza deriva dall'uguaglianza isodiametrica. Infatti $0 \leq \mathcal{L}^m(L(\mathbb{R}^n)) \leq \mathcal{L}^m(\mathbb{R}^k) = \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^k) = 0$ per le proprietà della misura di Hausdorff).

$$A \cap L^{-1}\{y\} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\}) = 0 \text{ q.o. } y \in \mathbb{R}^m \text{ rispetto alla misura } \mathcal{L}^m \quad \triangle$$

Per il Teorema di decomposizione polare si ha che $L = S \circ O^*$ Quindi

$$L(\mathbb{R}^n) = S(O^*(\mathbb{R}^n)) = S(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \dim(S(\mathbb{R}^m)) = \dim(L(\mathbb{R}^n)) = k < m \Rightarrow [[L]] = |\det S| = 0$$

Caso 2: $L = P$ dove P è proiezione ortogonale di \mathbb{R}^n su \mathbb{R}^m

$\forall y \in \mathbb{R}^m$ si ha che $P^{-1}\{y\}$ è un sottospazio affine $(n-m)$ -dimensionale. Inoltre $P^{-1}\{y\}$ è traslazione di $P^{-1}\{0\}$. Per il Teorema di Fubini si ha che:

$$y \rightarrow \mathcal{H}^{n-m}(A \cap P^{-1}\{y\}) \text{ è } \mathcal{L}^m\text{-misurabile}$$

e vale

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap P^{-1}\{y\}) dy = \mathcal{L}^n(A)$$

Caso 3: $\dim L(\mathbb{R}^n) = m$ (cioè L è suriettiva)

Usando il Teorema di decomposizione polare $L = S \circ O^*$ e quindi

$$[[L]] = |\det S| > 0.$$

\triangle *Affermazione 2* $O^* = P \circ Q$ dove $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ proiezione ortogonale e $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ortogonale.

Dimostrazione dell'affermazione: Sia Q un operatore ortogonale di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n tale che

$$Q^*(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = O(x_1, \dots, x_m)$$

per tutti $x \in \mathbb{R}^m$ Notiamo che

$$P^*(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

per tutti $x \in \mathbb{R}^m$. Quindi $O = Q^* \circ P^* = (P \circ Q)^*$ e quindi $O^* = P \circ Q \quad \triangle$
 $L^{-1}\{0\}$ è sottospazio $n-m$ dimensionale di \mathbb{R}^n e $L^{-1}\{y\}$ è traslazione di $L^{-1}\{0\}$
per ogni $y \in \mathbb{R}^m$. Quindi vale il teorema di Fubini $y \rightarrow \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})$ è \mathcal{L}^m -misurabile e si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(A) &= \mathcal{L}^n(Q(A)) \stackrel{\text{caso 2}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(Q(A) \cap P^{-1}\{y\}) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(Q(A \cap Q^{-1} \circ P^{-1}\{y\})) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap Q^{-1} \circ P^{-1}\{y\}) dy \end{aligned}$$

Poniamo $z = Sy \Rightarrow dz = |\det S| dy$ e $S^{-1}z = y$ quindi

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap Q^{-1} \circ P^{-1} \circ S^{-1}\{z\}) \frac{dz}{|\det S|}$$

Ma $L = S \circ O^* = S \circ P \circ Q$ e quindi

$$[[L]] \mathcal{L}^n(A) = |\det S| \mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{z\}) dz$$

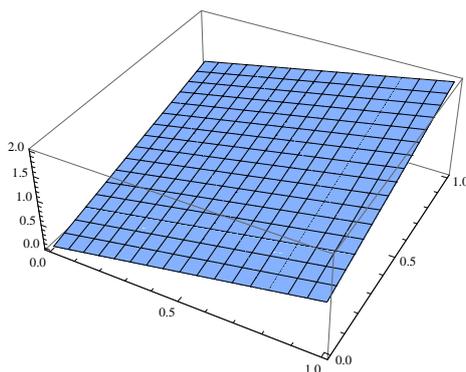
□

Commenti ed esempi

Oss. 1 Il punto 2 del lemma è proprio la formula di coarea per applicazioni lineari. Infatti $\int_A J L dx = \int_A [[L]] dx = [[L]] \mathcal{L}^n(A)$

Es. 1 Prendiamo come funzione lineare

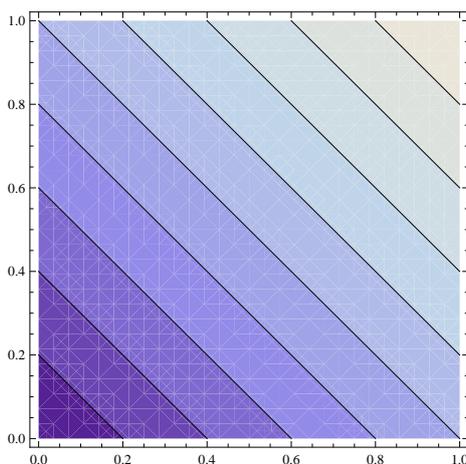
$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y$$



e prendiamo A come $[0, 1] \times [0, 1]$. Si ha che $|\nabla L(x, y)| = \sqrt{2}$. Si osserva che $0 \leq t \leq 2$ Fissato t si ha:

$$A \cap L^{-1}\{t\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ 0 \leq y \leq 1 \ x + y = t\} = \\ = \{(x, t - x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ x \leq t \leq x + 1\}$$

Questo insieme è un segmento di pendenza -1 che taglia il quadrato unitario e lo chiameremo $\gamma(x)$. Al variare di t , con $0 \leq t \leq 2$, avremo tutti i segmenti che tagliano il quadrato. Quindi:



$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^1(A \cap f^{-1}\{t\}) dt = \int_0^1 dt \int_0^t |\gamma'(x)| dx + \int_1^2 dt \int_{t-1}^1 |\gamma'(x)| dx = \sqrt{2} (\neq$$

$\mathcal{L}(A) = 1$) Effettuando ulteriori conti otteniamo $\int_0^1 \int_0^1 |\nabla f(x, y)| dx dy = \sqrt{2}$

Lemma 2 Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ lipschitziana e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ \mathcal{L}^n -misurabile. Allora:

1. $f(A)$ è \mathcal{L}^m -misurabile
2. $A \cap f^{-1}\{y\}$ è \mathcal{H}^{n-m} -misurabile, q.o. y rispetto a \mathcal{L}^m
3. la mappa $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ è \mathcal{L}^m -misurabile
4. $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy \leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (\text{Lip}(f))^m \mathcal{L}^n(A)$

DIM.

La dimostrazione di 1. è identica alla dimostrazione del punto 1. del lemma 2 della formula di area ².

$\forall j = 1, 2, \dots$ si consideri la famiglia di palle chiuse $\{B_i^j\}_{i=1}^\infty$ tale che

$$A \subset \cup_{i=1}^\infty B_i^j \quad \text{diam } B_i^j \leq \frac{1}{j}$$

e

$$\sum_{i=1}^\infty \mathcal{L}^n(B_i^j) \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{j}$$

Si definisca

$$g_i^j \equiv \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^{n-m} \chi_{f(B_i^j)}.$$

Si osserva che la successione di funzioni sopra definita è positiva al variare di i e misurabile rispetto a \mathcal{L}^m poichè

B_i^j è \mathcal{L}^n -misurabile $\overset{\text{per } 1.}{\Rightarrow} f(B_i^j)$ è \mathcal{L}^m -misurabile $\Leftrightarrow \chi_{f(B_i^j)}$ è \mathcal{L}^m -misurabile.

Inoltre si osserva che

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \sum_{i=1}^\infty g_i^j \quad (*)$$

Facciamo ora vedere che

$$\int_{\mathbb{R}^m}^* \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy \leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (\text{Lip}(f))^m \mathcal{L}^n(A) \quad (**)$$

infatti la seguente disuguaglianza dimostra 4. una volta dimostrato 3.

Si ricorda che data $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ e $\mu : \Omega \subset \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ misura

$$\int^* f d\mu := \inf \left\{ \int \varphi d\mu \mid \varphi \text{ è } \mu\text{-sommabile, semplice e } \varphi \geq f \text{ q.o.} \right\}.$$

$$\int_{\mathbb{R}^m}^* \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy \stackrel{\text{def mis di Hauss}}{=} \int_{\mathbb{R}^m}^* \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy =$$

²vedi [EG], sezione 3.3.1

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^m}^* \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}_i^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy \stackrel{oss. (*)}{\leq} \\
& \int_{\mathbb{R}^m} \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} g_i^j dy \stackrel{Fatou+Levi}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_i^j dy = \\
& \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2}\right)^{n-m} \mathcal{L}^m(f(B_i^j)) \stackrel{dis. isodiametrica}{\leq} \\
& \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2}\right)^{n-m} \alpha(m) \left(\frac{\text{diam } f(B_i^j)}{2}\right)^m \stackrel{f \text{ lip}}{=} \\
& \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(n-m) \alpha(m) (\text{Lip}(f))^m \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2}\right)^{n-m} \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2}\right)^m = \\
& \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)}\right) (\text{lip}(f))^m \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(n) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2}\right)^n \stackrel{ug. isod}{=} \\
& \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)}\right) (\text{Lip}(f))^m \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i^j) \leq \\
& \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)}\right) (\text{Lip}(f))^m (\mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)}\right) (\text{Lip}(f))^m (\mathcal{L}^n(A))
\end{aligned}$$

La dimostrazione di 2., 3., 4. discende dai seguenti casi

Caso 1: A compatto

Si fissi $t > 0$ e $\forall i \in \mathbb{N}$ sia U_i l'insieme di tutti i punti y per i quali esistono S_1, \dots, S_l insiemi in numero finito tali che

$$\begin{cases} A \cap f^{-1}\{y\} \subset \cup_{j=1}^l S_j \\ \text{diam } S_j \leq \frac{1}{i} \quad j = 1, 2, \dots, l \\ \sum_{j=1}^l \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam } S_j}{2}\right)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i} \end{cases}$$

Si nota che U_i sono aperti infatti

$y \in U_i \Rightarrow A \cap f^{-1}\{y\} \subset \cup_{j=1}^l S_j$. Quindi poichè f è continua poichè lipschitziana e A è compatto allora

$$A \cap f^{-1}\{z\} \subset \cup_{j=1}^l S_j$$

per ogni z sufficientemente vicino a y .

Si nota inoltre che

$$\{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}y) \leq t\} = \cap_{i=1}^{\infty} U_i$$

che è quindi un boreliano. La dimostrazione di questo fatto si vede tramite doppia inclusione, infatti:

” \subseteq ”

$$\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}y) \stackrel{\mathcal{H}^{n-m}(\dots) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^{n-m}(\dots)}{\leq} t \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^{n-m}(A \cap f^{-1}y) \leq t \quad \forall \delta > 0$$

Sia $\delta \in (0, \frac{1}{i})$. Allora

$$\exists \{S_j\}_{j=1}^\infty \text{ tali che } \begin{cases} A \cap f^{-1}\{y\} \subset \cup_{j=1}^\infty S_j \\ \text{diam} S_j \leq \delta < \frac{1}{i} \quad j = 1, 2, \dots, l \\ \sum_{j=1}^l \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam} S_j}{2}\right)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i} \end{cases}$$

Possiamo assumere, per semplicità, che S_j siano aperti.

Inoltre $A \cap f^{-1}\{y\}$ è compatto poiché $A \cap f^{-1}\{y\}$ è limitato essendo contenuto in A limitato in quanto compatto ed è chiuso poiché è intersezione di due chiusi. Quindi essendo $\cup_{j=1}^\infty S_j$ un ricoprimento di $A \cap f^{-1}\{y\}$ per definizione di insieme compatto si può estrarre un sottoricoprimento finito di $A \cap f^{-1}\{y\}$ del tipo $\cup_{j=1}^l S_j$ quindi $\{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} \subset \cap_{i=1}^\infty U_i$.

” \supseteq ”

$$y \in \cap_{i=1}^\infty U_i \Rightarrow \sum_{j=1}^l \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam} S_j}{2}\right)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i} \quad \forall i \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^\infty \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam} S_j}{2}\right)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i} \quad \forall i$$

Inoltre

$$\mathcal{H}_\frac{1}{i}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \sum_{j=1}^\infty \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam} S_j}{2}\right)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i} \quad \forall i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \sum_{j=1}^\infty \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam} S_j}{2}\right)^{n-m} \leq t$$

quindi

$$\{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} \subset \cap_{i=1}^\infty U_i$$

Conclusione

$$\{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} = \cap_{i=1}^\infty U_i \Rightarrow$$

$$y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}y) \text{ è Borel - misurabile}$$

Caso 2: A aperto

Se A è aperto allora esistono, per il ”teorema di approssimazione tramite insiemi aperti e compatti”, compatti tali che $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset A$ e tali che

$$A = \cup_{i=1}^\infty K_i$$

Quindi

$$\forall y \in \mathbb{R}^m \quad \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-m}(K_i \cap f^{-1}\{y\})$$

Quindi $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ è Borel-misurabile poiché limite di successione di funzioni misurabili dove la misurabilità della successione discende dal caso 1.

Caso 3: $\mathcal{L}^n(A) < \infty$

Applicando nuovamente "teorema di approssimazione tramite insiemi aperti e compatti" si trovano aperti $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset A$ tali che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(V_i - A) = 0, \quad \mathcal{L}^n(V_i) < \infty$$

Adesso

$$\mathcal{H}^{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) \leq \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \cap \mathcal{H}^{n-m}(V_i - A \cap f^{-1}\{y\})$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m}^* |\mathcal{H}^{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) - \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})| dy \leq \\ & \limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m}^* |\mathcal{H}^{n-m}((V_i - A) \cap f^{-1}\{y\})| dy \stackrel{(**)}{\leq} \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (Lip(f))^m \mathcal{L}^n(V_i - A) = 0 \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\mathcal{H}^{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) \rightarrow \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \quad \mathcal{L}^m - q.o.$$

così rifacendosi al caso 2

$$y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \text{ è } \mathcal{L}^m - \text{misurabile}$$

Inoltre si osserva che

$$\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \rightarrow 0 \quad \mathcal{L}^m - q.o.$$

e così

$$(A \cap f^{-1}\{y\}) \text{ è } \mathcal{H}^{n-m} - \text{misurabile } q.o.y \text{ rispetto a } \mathcal{L}^m$$

Caso 4: $\mathcal{L}^n(A) = \infty$

Basta osservare che A è riscrivibile come unione di una sequenza crescente di insiemi limitati \mathcal{L}^m - misurabili

□

Osservazioni

Oss. 2 Il punto 2,3 costituiscono, come nel lemma 1, l'ipotesi 0 di integrabilità della funzione che compare nell'integrale a secondo membro della formula di coarea.

Oss.3 Alcuni testi riportano la disuguaglianza (*) che compare nella dimostrazione del lemma 2 nel seguente modo:

$$\int_{\mathbb{R}^l}^* \mathcal{H}^k(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^l \leq \frac{\alpha(k)\alpha(l)}{\alpha(k+l)} (\text{Lip}(f))^l \mathcal{H}^{k+l}(A)$$

dove $l=m$, $k=n-m$

Lemma 3 Sia $t > 1$. Siano $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitziana e

$$B = \{x \mid Dh(x) \text{ esiste, } Jh(x) > 0\}$$

Allora esiste una famiglia numerabile $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ di boreliani di \mathbb{R}^n tali che

1. $\mathcal{L}^n(B - \cup_{k=1}^\infty D_k) = 0$
2. $h|_{D_k}$ è iniettiva per $k = 1, 2, \dots$
3. $\forall k = 1, 2, \dots$, esiste un automorfismo simmetrico $S_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che

$$\text{Lip}(S_k^{-1} \circ (h|_{D_k})) \leq t \quad \text{Lip}((h|_{D_k})^{-1} \circ S_k) \leq t$$

$$t^{-n} |\det S_k| \leq Jh|_{D_k} \leq t^n |\det S_k|$$

DIM. Applicando il lemma 3 della formula dell'area ³ con h al posto di f si trovano una famiglia di boreliani $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ e automorfismi simmetrici $T_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che

- (a) $B = \cup_{k=1}^\infty E_k$,
- (b) $h|_{E_k}$ è iniettiva,
- (c) $\begin{cases} \text{Lip}(T_k \circ (h|_{E_k})^{-1}) \leq t \text{ Lip}((h|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \leq t \\ t^{-n} |\det T_k| \leq Jh|_{E_k} \leq t^n |\det T_k| \quad (k = 1, 2, \dots) \end{cases}$

Per il punto (c), $(h|_{E_k})^{-1}$ è lipschitziana e quindi, per il teorema di estensione delle funzioni lipschitziane⁴, esiste una funzione $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $h_k = (h|_{E_k})^{-1}$ su $h(E_k)$.

Δ *Affermazione 1:* $Jh_k > 0$ \mathcal{L}^n q.o. su $h(E_k)$

Dim. Affermazione 1: Poiché $h_k \circ h(x) = x$ per $x \in E_k$, come conseguenza del teorema di Rademacher⁵ si ha che

$$Dh_k(h(x)) \circ Dh(x) = I \quad \mathcal{L}^n \text{ q.o. su } E_k$$

³vedi [EG], sezione 3.3.1

⁴**Estensione di funzioni lipschitziane** $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ lipschitziana. Allora esiste una funzione $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $\bar{f} = f$ su A e $\text{Lip}(\bar{f}) \leq \sqrt{m} \text{Lip}(f)$

⁵**Corollario del teorema di Rademacher** Siano $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziane e

$$Y \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(f(x)) = x\}$$

. Allora

$$Dg(f(x))Df(x) = I \quad \mathcal{L}^n - \text{q.o.}$$

e anche

$$Jh_k(h(x))Jh(x) = I \quad \mathcal{L}^n \text{ q.o. su } E_k \quad \diamond$$

Per il punto c si ha che $Jh|_{E_k} \geq t^{-n} |\det T_k| \geq 0$ e questo implica per \diamond che $Jh_k(h(x))Jh(x) > 0$ per q.o. $x \in E_k$ ed essendo h lipschitziana si ha l'asserto. \triangle Ora applicando sempre il lemma 3 della formula dell'area ad h_k avremo che esiste una famiglia di boreliani $\{F_j^k\}_{j=1}^\infty$ e di automorfismi simmetrici $\{R_j^k\}_{j=1}^\infty$ tali che

$$(d) \quad \mathcal{L}^n(h(E_k) - \cup_{j=1}^\infty F_j^k) = 0,$$

$$(e) \quad h_k|_{F_j^k} \text{ è iniettiva,}$$

$$(f) \quad \begin{cases} Lip(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \leq t Lip((h_k|_{F_j^k}) \circ (R_j^k)^{-1}) \leq t \\ t^{-n} |\det R_j^k| \leq Jh_k|_{F_j^k} \leq t^n |\det R_j^k| \quad (k = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Poniamo per $k = 1, 2, \dots$

$$D_j^k \equiv E_k \cap h^{-1}(F_j^k), \quad S_j^k \equiv (R_j^k)^{-1}$$

$$\triangle\triangle \text{ Affermazione 2 } \mathcal{L}^n(B - \cup_{k,j=1}^\infty D_j^k) = 0$$

Dim. Affermazione 2 Si noti che

$$h_k(h(E_k) - \cup_{j=1}^\infty F_j^k) = h^{-1}(h(E_k) - \cup_{j=1}^\infty F_j^k) = E_k - \cup_{j=1}^\infty D_j^k$$

Quindi per il punto (d)

$$\mathcal{L}^n(E_k - \cup_{j=1}^\infty D_j^k) = 0 \quad \forall k$$

ciò implica che

$$\mathcal{L}^n(\cup_{k=1}^\infty E_k - \cup_{k=1}^\infty \cup_{j=1}^\infty D_j^k) \stackrel{per(a)}{=} \mathcal{L}^n(B - \cup_{k=1}^\infty \cup_{j=1}^\infty D_j^k) = 0$$

$\triangle\triangle$

Si nota che essendo $h|_{E_k}$ iniettiva per il punto (b), allora anche $h|_{D_j^k}$ è iniettiva.

$\triangle\triangle\triangle$ *Affermazione 3* per $k, j = 1, 2, \dots$ si ha

$$\begin{aligned} Lip((S_j^k)^{-1} \circ (h|_{D_j^k})) &\leq t Lip((h|_{D_j^k})^{-1} \circ (S_j^k)) \leq t \\ t^{-n} |\det S_j^k| &\leq Jh|_{D_j^k} \leq t^n |\det S_j^k| \end{aligned}$$

Dim. Affermazione 3 Si noti che

$$Lip((S_j^k)^{-1} \circ (h|_{D_j^k})) = Lip(R_j^k \circ (h|_{D_j^k})) \leq Lip(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \leq t$$

per il punto f analogamente

$$Lip((h|_{D_j^k})^{-1} \circ (S_j^k)) \leq t$$

inoltre come osservato precedentemente

$$Jh_k(h(x))Jh(x) = I \quad \mathcal{L}^n \text{ q.o. su } D_j^k$$

Quindi in conclusione per il punto (f)

$$t^{-n} |\det S_j^k| = t^{-n} |\det R_j^k|^{-1} \leq Jh|_{D_j^k} \leq t^{-n} |\det R_j^k|^{-1} \leq t^n |\det S_j^k| \triangle\triangle\triangle$$

□

Passiamo ora alla dimostrazione della formula di coarea.

DIM.

Osserviamo che $A = A_1 \cup A_2$ dove $A_1 \subset \{J_f > 0\}$ e $A_2 \subset \{J_f = 0\}$, Quindi

$$\int_A Jf dx = \int_{A_1 \cup A_2} Jf dx \stackrel{A_1 \cap A_2 = \emptyset}{=} \int_{A_1} Jf dx + \int_{A_2} Jf dx$$

Studiamo separatamente i due casi, nel caso 1 è da intendere $A = A_1$ e nel caso 2 $A = A_2$

Caso 1: $A \subset \{J_f > 0\}$

Definiamo:

$$\Lambda(n, n-m) = \{\lambda : \{1, \dots, n-m\} \rightarrow \{1, \dots, n\} | \lambda \text{ crescente}\}$$

e $\forall \lambda \in \Lambda(n, n-m)$ definiamo $P_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ in questo modo:

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(n-m)})$$

Dunque $\forall \lambda \in \Lambda(n, n-m)$ scriviamo $f = q \circ h_\lambda$ dove

$$\begin{aligned} h_\lambda : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} & h_\lambda(x) &\equiv (f(x), P_\lambda(x)) & x &\in \mathbb{R}^n \\ q : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} &\rightarrow \mathbb{R}^m & q(y, z) &\equiv y & y &\in \mathbb{R}^m, \quad z \in \mathbb{R}^{n-m} \end{aligned}$$

Ora interessa studiare quando il $\det Dh_\lambda \neq 0$. Innanzitutto abbiamo per costruzione che:

$$h_\lambda(x) \equiv (f(x), P_\lambda(x)) = (f_1(x), \dots, f_m(x), x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(n-m)})$$

e, di conseguenza, la matrice gradiente di h_λ sarà:

$$Dh_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{\lambda(1)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{\lambda(1)}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{\lambda(n-m)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{\lambda(n-m)}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Si osserva facilmente che la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_{\lambda(1)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{\lambda(1)}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{\lambda(n-m)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{\lambda(n-m)}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ha m colonne di zeri. Senza perdere in generalità⁶, possiamo supporre che le m colonne di zeri siano dalla $(n-m+1)$ -esima alla n -esima colonna; di

⁶Richiami di algebra lineare. Sia $A \in M_{n \times n}$ allora

1. Se A ha una riga o una colonna nulla, $\det(A) = 0$
2. se $B \in M_{n \times n}$ è ottenuta da A scambiando tra loro due righe o due colonne, allora $\det B = -\det A$

conseguenza $\det Dh_\lambda \neq 0$ per lo sviluppo di Laplace⁷ se:

$$\det P_\lambda \equiv \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{\lambda(1)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{\lambda(1)}}{\partial x_{n-m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{\lambda(n-m)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{\lambda(n-m)}}{\partial x_{n-m}} \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow r(P_\lambda) = n-m \Leftrightarrow P_\lambda \text{ iniettiva}$$

e se:

$$\det Q \equiv \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow r(Q) = m \Leftrightarrow Q \text{ invertibile}$$

Ora chiamiamo $A_\lambda \equiv \{x \in A \mid \det Dh_\lambda \neq 0\}$. Si nota che $A = \cup_\lambda A_\lambda$; infatti

- se $x \in A_\lambda$ allora $x \in A$ per come è stato definito A_λ ; quindi $A \supset \cup_\lambda A_\lambda$
- se $x \in A \subset Jf > 0$ allora esiste un λ tale che $\det A_\lambda \neq 0$; quindi $A \subset \cup_\lambda A_\lambda$

Per comodità possiamo assumere che per qualche $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$ $A = A_\lambda$. Fissato $t > 1$, si può applicare il lemma 3 a $h = h_\lambda$ e ottenere, in tal modo, una famiglia di boreliani disgiunti $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ e automorfismi simmetrici $\{S_k\}_{k=1}^\infty$ tali che soddisfino le proprietà 1-3 del lemma 3. Sia $G_k \equiv A \cap D_k$.

Δ *Affermazione 1* $t^{-n}[[q \circ S_k]] \leq Jf|_{G_k} \leq t^n[[q \circ S_k]]$

Dim. Affermazione 1 Poiché $f = q \circ h$ per q.o. $x \in \mathcal{L}^n$ si ha:

$$\begin{aligned} Df &= q \circ Dh && \text{(perché } q \text{ è proiezione)} \\ &= q \circ S_k \circ S_k^{-1} \circ Dh \\ &= q \circ S_k \circ D(S_k^{-1} \circ h) && \text{(perché } S_k \text{ è automorfismo)} \\ &= q \circ S_k \circ C \end{aligned}$$

dove $C = D(S_k^{-1} \circ h)$. Per il lemma 3 si ha che

$$Lip(h^{-1} \circ S_k) \leq t \Rightarrow Lip(h^{-1} \circ S_k)^{-1} \geq t^{-1} \Rightarrow Lip(S_k^{-1} \circ h) \geq t^{-1}$$

quindi

$$t^{-1} \leq Lip(S_k^{-1} \circ h) = Lip C \leq t \quad \text{su } G_k \quad (*)$$

Essendo Df e $q \circ S_k$ operatori lineari si può applicare la decomposizione polare:

$$\begin{aligned} Df &= S \circ O^* \\ q \circ S_k &= T \circ P^* \end{aligned}$$

dove $S, T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono simmetriche e $O, P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono ortogonali. Allora:

$$S \circ O^* = T \circ P^* \circ C \quad (**)$$

e di conseguenza:

$$S = T \circ P^* \circ C \circ O$$

Poiché $G_k \subset A \subset \{Jf > 0\}$, $\det S \neq 0 \Rightarrow \det T \neq 0$ e se $v \in \mathbb{R}^m$:

$$|T^{-1} \circ Sv| = |P^* \circ C \circ Ov|$$

⁷vedi [S] pp. 85-86

$$\begin{aligned}
&= {}^8|C \circ Ov| \\
&\stackrel{(*)}{\leq} t|Ov| \\
&= {}^9t|v|
\end{aligned}$$

Inoltre poiché vale $|T^{-1} \circ Sv| \leq t|v|$ se si considera $|v|$ come raggio di una palla centrata in 0, si ha che

$$(T^{-1} \circ S)B(0, 1) \subset B(0, t)$$

e

$$Jf = |\det S| \leq t^n |\det T| = t^n [[q \circ S_k]]$$

Analogamente se $v \in \mathbb{R}^m$ per la (**)

$$\begin{aligned}
|S^{-1} \circ Tv| &= |O^* \circ C^{-1} \circ Pv| \\
&= |C^{-1} \circ Pv| \\
&\leq t|Pv| \\
&= t|v|
\end{aligned}$$

E quindi

$$[[q \circ S_k]] = |\det T| \leq t^n |\det S| = t^n Jf$$

△

Ora si calcoli:

$$\begin{aligned}
&t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy \\
&= t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap (h^{-1} \circ q^{-1}\{y\})) dy \\
&= t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) dy \\
&\stackrel{h^{-1} \leq tS_k^{-1}}{\leq} t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(tS_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) dy \\
&= t^{-3n+m} t^{n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) dy \\
&= t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) dy \\
&= t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((S_k^{-1} \circ h(G_k)) \cap (S_k^{-1} \circ q^{-1}\{y\})) dy \\
&= t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((S_k^{-1} \circ h(G_k)) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\}) dy = \diamond
\end{aligned}$$

Osserviamo che $G_k \equiv A \cap D_k$ è \mathcal{L}^n misurabile perché intersezione di lebesguiani. Poiché h è lipschitziana allora per lemma 2 $h(G_k)$ è \mathcal{L}^n misurabile e S_k^{-1} è

⁸Poniamo $C \circ Ov = w$ ed essendo P^* ortogonale: $P^*(z)P^*(w) = zw$. Se $z = w \Rightarrow (P^*(w))^2 = w^2 \Rightarrow |P^*(w)| = |w| = |C \circ Ov|$

⁹vedi nota precedente

lineare quindi per lemma 1 $S_k^{-1} \circ h(G_k)$ è \mathcal{L}^n misurabile e $q \circ S_k$ è lineare perché composizione di applicazioni lineari. Quindi:

$$\begin{aligned}
\diamond &= t^{-2n} [[q \circ S_k]] \mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \\
&\leq t^{-2n} [[q \circ S_k]] \mathcal{L}^n(tG_k) \\
&= t^{-n} [[q \circ S_k]] \mathcal{L}^n(G_k) \\
&\stackrel{t^{-n} [[q \circ S_k]] \leq Jf|_{G_k}}{\leq} \int_{G_k} Jf dx \\
&\leq t^n [[q \circ S_k]] \mathcal{L}^n(G_k) \\
&\stackrel{\text{Lemma 3}}{\leq} t^{2n} [[q \circ S_k]] \mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \\
&\stackrel{\text{Lemma 1}}{=} t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1} \circ h(G_k) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\}) dy \\
&\leq t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) dy \\
&\leq t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(th^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) dy \\
&= t^{2n} t^{n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) dy \\
&= t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap (h^{-1} \circ q^{-1})\{y\}) dy \\
&\stackrel{(q \circ h)^{-1} = f^{-1}}{=} t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy
\end{aligned}$$

Per il lemma 3:

$$\mathcal{L}^n(A - \cup_{k=1}^{\infty} G_k) = 0$$

quindi:

$$t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy \leq \int_{G_k} Jf dx \leq t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy$$

Sommando su k :

$$t^{-3n+m} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{G_k} Jf dx \leq t^{3n-m} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy$$

Per Levi:

$$t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_k \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy \leq \int_A Jf dx \leq t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_k \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) dy$$

facendo tendere $t \rightarrow 1^+$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy \leq \int_A Jf dx \leq \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy$$

E quindi:

$$\int_A Jf dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy$$

Caso 2: $A \subset \{Jf = 0\}$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e siano

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x) + \varepsilon y \\ p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

Quindi

$$Dg^{10} = (Df, \varepsilon \mathbb{I})_{m \times (m+n)}$$

e

$$\varepsilon^m \leq Jg = [[Dg]] = [[Dg^*]] \leq C\varepsilon \quad \diamond$$

perché si ricorda che Jf può essere visto come la somma in quadratura dei determinanti dei minori di ordine massimo che compaiono in Df . Pertanto, un minore sarà proprio dato dalla matrice identità \mathbb{I}_m moltiplicata per lo scalare ε , che compare in Dg . Ecco motivata la stima dal basso. La stima dall'alto è una conseguenza del fatto che $Jg = \sqrt{\varepsilon^{2m} + Jf^2 + \varepsilon^2(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f_j}{\partial x_i})^2)}$; infatti raccogliendo sotto radice un ε^2 il risultato sarà ε moltiplicato con una radice che può essere stimata con una costante C opportuna, essendo f lipschitziana. Lo scopo della dimostrazione è far vedere che

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy = 0 = \int_A Jf dy$$

Il risultato del secondo integrale è ovvio infatti discende dalle ipotesi assunte all'inizio della dimostrazione del caso 2 mentre per il primo si osserva quanto segue:

\triangle Oss. Sia $\mathbb{B} := A \times B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ allora fissati $y, w \in \mathbb{R}^m$ si ha che ,

$$\mathbb{B} \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } w \notin B(0, 1) \\ (A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) \times \{w\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dim. Oss.

$$(x, z) \in \mathbb{B} \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\} \Leftrightarrow x \in A, z \in B(0, 1), z = w, f(x) + \varepsilon z = y$$

$$\Leftrightarrow x \in A, z \in B(0, 1), z = w, f(x) = y - \varepsilon w \Leftrightarrow w \in B(0, 1), (x, z) \in (A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) \times \{w\} \quad \triangle$$

Quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) dy \quad \forall w \in \mathbb{R}^m$$

¹⁰Nel caso $n = 3$ e $m = 2$ risulta

$$Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \varepsilon & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{\alpha(m)} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) dy dw \\
&\stackrel{Oss.}{=} \frac{1}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(\mathbb{B} \cap g^{-1}(y) \cap p^{-1}(w)) dw dy \\
&\stackrel{**}{\leq} \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(\mathbb{B} \cap g^{-1}(y)) dy \\
&\stackrel{Caso 1}{=} \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{B}} Jg dx dz \\
&\leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} \mathcal{L}^n(A) \sup_{\mathbb{B}} Jg \\
&\stackrel{\diamond}{\leq} C\varepsilon \mathcal{L}^n(A) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

*Possiamo riscrivere $1 = \frac{1}{\alpha(m)} \mathcal{L}^m(B(0,1)) = \frac{1}{\alpha(m)} \int_{B(0,1)} dw$ e ciò moltiplica l'integrale

** Vale per 4. del Lemma 2

□

Una conseguenza della formula di coarea è il teorema del cambio di variabili.

Teorema 2 (Cambio di variabili) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lipschitziana, $n \geq m$. Allora per ogni funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{L}^n sommabile si ha:

$$g|_{f^{-1}\{y\}} \text{ è } \mathcal{H}^{n-m} \text{ sommabile} \quad \mathcal{L}^m \text{ q.o.y}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}\{y\}} g d\mathcal{H}^{n-m} dy$$

DIM.

Caso 1: $g \geq 0$

Essendo g \mathcal{L}^n sommabile essa è \mathcal{L}^n misurabile quindi si può applicare il teorema di rappresentazione di funzioni misurabili (*). Pertanto $g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}$ con $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ famiglia numerabile di insiemi \mathcal{L}^n misurabili opportuni. Allora:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x) dx &\stackrel{(*)+Levi}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf(x) dx \\
&\stackrel{F. di Coarea}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_i \cap f^{-1}\{y\}) dy \\
&\stackrel{Levi}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{H}^{n-m}(A_i \cap f^{-1}\{y\}) dy \\
&\stackrel{(**)}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}\{y\}} g d\mathcal{H}^{n-m} dy
\end{aligned}$$

(**) Definizione di integrale di funzione semplice rispetto alla misura \mathcal{H}^{n-m}

Caso 2: g qualsiasi funzione \mathcal{L}^n sommabile

Basta notare che $g = g^+ - g^-$ e applicare il caso 1 su g^+ e g^-

□

Da questo teorema derivano le seguenti applicazioni.

Proposizione 1 (Coordinate Polari) Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{L}^n sommabile allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} g d\mathcal{H}^{n-1} dr$$

in particolare si osserva che

$$\frac{d}{dr} \int_{\partial B(0,r)} g dx = \int_{\partial B(0,r)} g d\mathcal{H}^{n-1} dr \quad \mathcal{L}^1 - q.o. \quad r > 0$$

DIM.

Basta applicare il teorema 2 con $f(x) = |x|$. Infatti si ha che $Df(x) = \frac{x}{|x|}$ quando $x \neq 0$ e $Jf(x) = 1$

□

Proposizione 2 (Curve di Livello) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\}) dt$$

DIM.

Basta osservare che $Jf = |Df|$ per definizione di jacobiano di funzione lipschitziana.

□

Proposizione 3 Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana con

$$\text{ess inf } |Df| = \sup\{b \in [-\infty, +\infty] \mid \mathcal{L}^n(\{|Df(x)| < b\}) = 0\} \quad (*)$$

Sia inoltre che $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{L}^n sommabile allora

$$\int_{\{f > t\}} g dx = \int_t^{+\infty} \int_{\{f=s\}} \frac{g}{|Df|} d\mathcal{H}^{n-1} ds$$

In particolare si ha che

$$\frac{d}{dt} \int_{\{f > t\}} g dx = - \int_{\{f=t\}} \frac{g}{|Df|} d\mathcal{H}^{n-1} \quad \mathcal{L}^1 - q.o. \quad t$$

(*) i.e. il più grande dei b della retta ampliata tale che $|Df(x)| \geq b$ $\mathcal{L}^n - q.o.$

DIM.

Poniamo $E_t \equiv \{f > t\}$ quindi

$$\begin{aligned} \int_{\{f > t\}} g dx &\stackrel{Jf=|Df|}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_t} \frac{g}{|Df|} Jf dx \\ &\stackrel{Teo.2}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\partial E_s} \chi_{E_t} \frac{g}{|Df|} d\mathcal{H}^{n-1} ds \\ &= \int_t^{+\infty} \int_{\{f=s\}} \frac{g}{|Df|} d\mathcal{H}^{n-1} ds \end{aligned}$$

□

References

- [1] L. C. Evans e R. F. Gariepy: *Measure theory and fine properties of function*
- [2] E. Sernesi: *Geometria 1*