AM310-2012 : I ESONERO

TEMA 1 . Sia μ misura esterna su di un insieme X.

1.1. Dare la definizione di insieme μ-misurabile in X e provare che la classe Σ_μ degli insiemi μ-misurabili é una sigma algebra.

1.2. Provare che μ, ristretta a Σ_μ é numerabilmente additiva.

1.3. Sia H^s, $s > 0$ la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbf{R}^n$. Provare che i boreliani sono H^s-misurabili.

TEMA 2. Sia μ misura esterna su X, Σ la sigma algebra dei misurabili.

Sia $p > 1$ ed $f_n \in L^p(\mu)$ successione convergente in misura ad una certa f.

2.1. (Teorema di Vitali) Provare che f_n tende ad f in L^p se e solo se

(k) $\quad \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \quad \mu(E) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int_E |f_n|^p \leq \epsilon$

(kk) $\quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \quad \mu(E_\epsilon) < \infty \quad$ e $\quad \sup_n \int_{E_\epsilon^c} |f_n|^p \leq \epsilon$

2.2. Dedurre che, se $\int_X |f_n|^p \to \int_X |f|^p$, allora f_n ha una sottosuccessione convergente ad f in L^p.
Mostrare con un esempio che puó accadere che f_n non converga ad f in L^p.

2.3. Dedurre che, se $q \in [1, p)$ e $\mu(E) < \infty$, allora $\int_E |f_n - f|^q \to_n 0$.

TEMA 3. Sia μ misura su X.

3.1 Provare che $\quad < f, g >:= \int\limits_X fg d\mu \quad$ é un prodotto scalare su $L^2(\mu)$, e che L^2, dotato di tale norma, é completo.

3.2 Dare la definizione di base ortonormale in un Hilbert H, e provare che se H é separabile, allora H ammette una base ortonormale.

3.3 Indicare perché $L^2([-\pi, \pi])$ é Hilbert separabile e scrivere una base ortonormale.

TEMA 4. Sia H Hilbert, $C \subset H$ chiuso e convesso. Provare che

$$\forall h \in H,\ \exists! h_C \in C : \quad \|h - h_C\| \leq \|h - v\| \quad \forall v \in C$$

Dedurre che

4.1. Se l é un funzionale lineare e continuo su H allora

$$\exists!\ h \in H : \qquad l(f) =< f, h > \quad \forall f \in H$$

4.2. Se $f_n \in C$ converge debolmente a f allora $f \in C$.

4.3. Indicare, fornendo qualche argomentazione, come tali risultati, opportunamente adattati, sussistano in L^p se $p > 1$.
Provare, in particolare, che se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora L^q é isometricamente isomorfo ad $(L^p)'$.

TEMA 5. Sia μ misura su X.

5.1 Sia $p > 1$. Provare, assumendo L^p separabile, che ogni successione limitata in $L^p(\mu)$ ha estratte debolmente convergenti.

5.2 Mostrare con un controesempio che le successioni limitate in L^1 ed in L^∞ non hanno in generale estratte debolmente convergenti.

5.3 Mostrare che, se μ é σ-finita, allora

$$\left[E \in \Sigma, 0 < \mu(E) < \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \leq M \right] \quad \Rightarrow \quad f \leq M \quad q.o.$$

5.4 Dedurre poi che (se μ é σ-finita) $L^\infty(\mu)$ é isometricamente isomorfo al duale di L^1.
Mostrare infine con un esempio che il duale di L^∞ non é L^1.