AM310 - II Settimana2012

FUNZIONI MISURABILI Siano X un insieme , $\Sigma \subset P(X)$ sigma algebra. Una funzione $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é misurabile (diremo $f \in \mathcal{M}$) se vale una delle (tra loro equivalenti) affermazioni

$$(i)\ \{x \in X : f(x) \leq c\} \in \Sigma \ \ \forall c \in \mathbf{R} \qquad (ii)\ \{x \in X :\ f(x) > c\} \in \Sigma\ \forall c \in \mathbf{R}$$

$$(iii)\ \ \{f(x) < c\} \in \Sigma\ \forall c \in \mathbf{R} \qquad (iv)\ \ \{f(x) \geq c\} \in \Sigma\ \ \forall c \in \mathbf{R}$$

Nota. Sia μ **misura completa**, cioé $N_0 \subset N \in \Sigma,\ \mu(N) = 0 \Rightarrow N_0 \in \Sigma$. Allora se $f \in \mathcal{M}$ e $\mu(\{x : g(x) \neq f(x)\}) = 0$, ($g$ coincide con f *quasi ovunque*) da $\{x \in X : f(x) \leq c\}\Delta\{x \in X : g(x) \leq c\} \subset \{x : g(x) \neq f(x)\}$ segue $g \in \mathcal{M}$.

Esempi χ_A (funzione caratteristica di A) é misurabile se e solo se $A \in \Sigma$.

Sia $X = \mathbf{R}^N$ e Σ la classe dei boreliani. Se f é inferiormente/superiormente semicontinua (cioé $f^{-1}((-\infty, c])$ é chiuso/$f^{-1}((-\infty, c))$ é aperto, per ogni $c \in \mathbf{R}$) allora f é (borel) misurabile.

Proposizione 1 *(stabilitá di $\mathcal{M}$).* Siano $f,\ g : X \to (-\infty, +\infty)$ misurabili. Allora

(i) $tf + sg,\ \ t, s \in \mathbf{R},\ fg,\ f^+(x) := \max\{f(x), 0\},\ f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}, |f|$; sono misurabili; $\frac{1}{f}$ é misurabile se $\mu(\{f = 0\}) = 0$.

(ii) $f_n \in \mathcal{M} \ \Rightarrow\ \inf_n f_n(x) \in \mathcal{M},\ \ \sup_n f_n(x) \in \mathcal{M},\ \ \liminf_n f_n(x) \in \mathcal{M}$, $\limsup_n f_n(x) \in \mathcal{M}$

Verifica di (i): La misurabilitá di tf, $\frac{1}{f}$ segue subito dalla definizione. Poi, $f+g$ é misurabile perché $\{f + g < c\} = \cup_{\{r,s\in\mathbf{Q},\ r+s<c\}}(\{f < r\} \cap \{g < s\}) \in \Sigma$; infatti: $f(x) + g(x) < c \Rightarrow \exists r, s \in \mathbf{Q} :\ \ f(x) < r < \frac{c}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2}$ e $g(x) < s < \frac{c}{2} + \frac{g(x)-f(x)}{2}$ (ció prova "$\subset$"; l'altra inclusione é ovvia). Si vede poi subito che f misurabile $\Rightarrow$ f^2 é misurabile, e quindi $fg = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$ é misurabile, e quindi $f^+ = f\chi_{\{f\geq 0\}}$, $f^- = -f\chi_{\{f\leq 0\}}$, $|f| = f^+ + f^-$ sono misurabili

Verifica di (ii): $\{x :\ \inf_n f_n(x) \geq c\} = \cap_n\{x :\ f_n(x) \geq c\} \in \Sigma \ \Rightarrow \inf_n f_n \in \mathcal{M}$, $\{x : \sup_n f(x) \leq c\} = \cap_n\{x : f_n(x) \leq c\} \in \Sigma$, $\liminf_n f_n(x) = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k(x)$, $\limsup_n f_n(x) = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k(x)$.

Proposizione 2 *(rappresentazione di $f \in \mathcal{M}$).* Sia $f \geq 0$ misurabile. Allora

$$\exists E_j \in \Sigma : \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x) \quad = \quad \lim_n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x) \qquad \forall x \in X$$

Dimostrazione. Siano, induttivamente,

$$E_1 := \{x : f(x) \geq 1\}, \qquad E_n := \{x : \ f(x) \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\chi_{E_j}}{j} \ + \frac{1}{n}\}, \ n \in N$$

Posto $g(x) := \sum_j \frac{1}{j}\chi_{E_j}$, proviamo che $f = g$.

É $f(x) \geq g(x)$. Infatti: $x \notin \cup_j E_j \Rightarrow g(x) = 0, \quad x \in E_n \setminus \cup_{k\geq n+1} E_k \Rightarrow f(x) \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\chi_{E_j}}{j} \ + \frac{1}{n} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{\chi_{E_j}}{j} = g(x)$; infine, $\exists j_k \to +\infty : \ x \in E_{j_k} \ \forall k \Rightarrow f(x) \geq \sum_{j=1}^{j_k-1} \frac{\chi_{E_j}}{j} \ \ \forall k \Rightarrow f(x) \geq \sum_j^{+\infty} \frac{1}{j}\chi_{E_j} = g(x)$

É $f(x) \leq g(x)$. Infatti, $g(x) < +\infty \Rightarrow \ \exists j_k \to +\infty : x \notin E_{j_k} \Rightarrow f(x) \leq \sum_{j=1}^{j_k-1} \frac{\chi_{E_j}}{j} + \frac{1}{j_k} \leq g(x) + \frac{1}{j_k} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

Funzioni semplici. Sia μ misura su $(X, \ \Sigma)$; $\phi : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabile si dice semplice (diremo $\phi \in \mathcal{S}$) se $\phi(X)$ é al piú numerabile:

$$\phi \ = \ \sum_t t\chi_{\{\phi=t\}} \ = \ \sum_i t_i\chi_{A_i}, \quad A_i = \{\phi = t_i\} \in \Sigma \text{ disgiunti}, \quad \cup_i A_i = X$$

é rappresentazione "canonica" di ϕ.

Se $\{B_j \ : \ j \ \in \ \mathbf{N}\}$ é partizione di X , $A_i \cap B_j, j \in \mathbf{N}$ é partizione di A_i e $\chi_{A_i} = \sum_j \chi_{A_i\cap B_j}, \quad \phi = \sum_{ij} t_{ij}\chi_{A_i\cap B_j}$ ove $t_{ij} = t_i\chi_{A_i\cap B_j}$.

Integrale di una funzione semplice. Sia $\phi \geq 0$ semplice.

$$\int_X \phi \, d\mu := \ \sum_t t \ \mu(\{\phi = t\}) \ = \ \sum_i t_i\mu(A_i), \qquad (0 \times \infty := 0)$$

Nota. Sia $\{B_j : j \in \mathbf{N}\}$ partizione di X, con $B_j \in \Sigma$. Sia $\sum_i t_i\chi_{A_i}$ rappresentazione canonica di ϕ. É

$$\int \phi \ = \ \sum_{ij} t_{ij}\mu(A_i \cap B_j) \qquad (\int \phi \ := \int_X \phi \, d\mu)$$

Inoltre, $\int \phi = 0$ se e solo se $\mu(\{\phi \neq 0\}) = 0$, (sse ϕ é nulla "quasi ovunque") e $\mu(N) = 0 \Rightarrow \int \varphi\chi_N = 0, \int \varphi\chi_{N^c} = \int \varphi$.

Proposizione 3. Siano $\phi, \ \psi \ \geq \ 0$ semplici. Allora

$$(i) \ \ \phi \leq \psi \Rightarrow \int \phi \leq \int \psi$$
$$ii) \ \ \int \phi + \psi \ = \ \int \phi \ + \ \int \psi, \ \ \int t\phi \ = \ t \int \phi, \ \ \forall t \geq 0$$

INTEGRALE DI UNA FUNZIONE MISURABILE NON NEGATIVA

Sia $f \geq 0$ misurabile. Definiamo

$$\int f \ := \ \int_X f \, d\mu \ := \sup_{\phi \in \mathcal{S},\, 0 \,\leq\, \phi \,\leq\, f} \int \phi$$

Nota. Siccome $\int \varphi = \sum_{j=1}^{k} t_j \mu(E_j) + \sum_{j=k+1}^{\infty} t_j \mu(E_j) \leq \sum_{j=1}^{k} t_j \mu(E_j) + \epsilon$ se $k \geq k_\epsilon$, il sup non cambia se alle ϕ si chiede di assumere al piú un insieme finito di valori. Inoltre, per $f = \phi$ semplice, le definizioni coincidono. Poi,

Proposizione 4. Siano $f \leq g$ misurabili e non negative. Allora $\int f \leq \int g$

Nota. $\int f = 0$ se e solo se $f = 0$ quasi ovunque: ovvio se $f = 0$ q.o.; viceversa, $\int f = 0$, $\phi \leq f \Rightarrow \int \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$ quasi ovunque. Dalla Proposizione 2: $\exists \phi_j \leq f$, $\phi_j \to f$ e quindi $f = 0$ quasi ovunque.

Teorema di Beppo Levi (o della convergenza monotona)

Siano f_n funzioni misurabili, tali che $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Dimostrazione. Basta provare che $\int f \ \leq \ \lim \int f_n$, ovvero

$$\phi = \sum_{j=1}^{k} t_j \chi_{E_j} \in \mathcal{S}, \quad 0 \leq \phi \leq f \quad \Rightarrow \quad \int \phi = \sum_{j=1}^{k} t_j \mu(E_j) \ \leq \ \lim \int f_n$$

Cominciamo con l'osservare che, se $\phi = +\infty$ in E con $\mu(E) > 0$, allora, per ogni $M > 0$,

$$E_n^M := \{x \in E : \ f_n(x) \geq M\} \subset E_{n+1}^M \, , \qquad \cup_n E_n^M = E$$

perché $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ e $f_n(x) \to +\infty$ $\forall x \in E$. Quindi, siccome $\mu(E) > 0$,

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{E_n^M} \geq M\mu(E_n^M) \to M\mu(E) \quad \Rightarrow \quad \int f_n \to +\infty$$

Possiamo quindi supporre $t_j < +\infty$. Sia $0 < t < 1$. Siccome $\varphi(x) > 0 \Rightarrow \lim_n f_n(x) > t\varphi(x)$, posto $A_n^t := \{x : \ f_n(x) \geq t\varphi(x)\}$, si ha che $\cup_n A_n^t = X$ (unione crescente). Quindi

$$\int f_n \ \geq \ \int f_n \chi_{A_n^t} \ \geq \ t \int \varphi \chi_{A_n^t} = t \sum_{j=1}^{k} t_j \mu(A_n^t \cap E_j) \to t \sum_{j=1}^{k} t_j \mu(E_j) = t \int \varphi$$

Data l'arbitrarieta' di t, concludiamo che $\int \phi \ \leq \ \lim \int f_n$.

Nota. Si puó supporre $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \ \ \forall n \in \mathbf{N}, \ \ \forall x \notin Z, \ \ \mu(Z) = 0$. Basterá sostituire alle f_n le $f_n(1-\chi_Z)$. Non si puó invece sostituire all'ipotesi di non decrescenza, $f_n \leq f_{n+1}$, quella di non crescenza $f_n \geq f_{n+1}$. Ad esempio, $f_n(x) = \frac{1}{n}$ in $\mathbf{R}$ tende a zero mentre $\int_{\mathbf{R}} f_n = +\infty \quad \forall n$.

Corollario. Siano f, g, f_j funzioni misurabili non negative, $t \geq 0$. Allora
(i) $\int tf + sg = t\int f + s\int g, \forall t, s \geq 0$ $\qquad (ii)$ $\int \sum_1^\infty f_j \ = \ \sum_1^\infty \int f_j$

(i) Dalla Proposizione 2: $\exists \varphi_j \leq f, \ \ \psi_j \leq g$ successioni crescenti di funzioni semplici non negative tali che $\varphi_j \to f, \ \ \psi_j \to g$. Da Beppo Levi, segue che

$$\int f + g = \lim_j \int \varphi_j + \psi_j = \lim(\int \varphi_j + \int \psi_j) = \int f + \int g$$

(ii) $\sum_1^n f_j \to \sum_1^\infty f_j$ in modo crescente implica

$$\sum_1^\infty \int f_j = \lim_n \sum_1^n \int f_j = \lim_n \int \sum_1^n f_j = \int \lim_n \sum_1^n f_j = \int \sum_1^\infty f_j$$

Il Lemma di Fatou. $\quad f_n \geq 0$ *misurabili* $\quad \Rightarrow \quad \underline{\lim} \int f_n \ \geq \ \int \underline{\lim}\, f_n$

Prova: $\int f_n \ \geq \ \int \inf_{k\geq n} f_k \quad \Rightarrow \quad \underline{\lim} \int f_n \ \geq \ \underline{\lim} \int \inf_{k\geq n} f_k$ e, siccome $\inf_{k\geq n} f_k$ converge in modo crescente a $\underline{\lim}\, f_n$, dal Teorema di B. Levi segue $\lim \int \inf_{k\geq n} f_k \ = \ \int \underline{\lim}\, f_n$.

Il teorema di Lebesgue (o della convergenza dominata).

Siano $f_n \geq 0$ funzioni misurabili convergenti puntualmente a zero . Allora

$$\exists \ g \geq 0 \ \textit{misurabile} : \int_X g < +\infty \quad e \quad f_n(x) \leq g(x) \ \ \forall n, \qquad \Rightarrow \quad \int f_n \to 0$$

Prova. Sia $h_n(x) = g(x) - f_n(x)$. É $\int h_n + \int f_n = \int g < +\infty$. Da Fatou:

$$\int g - \overline{\lim} \int f_n = \underline{\lim}\, [\int g - \int f_n] = \underline{\lim} \int h_n \ \geq \int g \quad \text{e cioé} \quad 0 \leq \overline{\lim} \int f_n \leq 0$$

Nota. L'ipotesi di 'equidominatezza' é essenziale.

Ad esempio, $\chi_{[n,n+1]}(x) \to 0 \ \ \forall x \in \mathbf{R}$ ma $\int_{\mathbf{R}} \chi_{[n,n+1]} = 1 \quad \forall n$.

Un altro esempio é dato dai **cambiamenti di scala** . Se $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}, f \geq 0$, sia $f_n(x) := n^N f(nx)$. Siccome $\int_{\mathbf{R}^N} n^N \chi_E(nx)\, dx = n^N L^N(\frac{1}{n}E) = L^N(E)$ é $\int \varphi_n = \int \varphi$ per ogni funzione semplice φ e quindi $\int_{\mathbf{R}^N} f_n = \int_{\mathbf{R}^N} f$.

SOMMABILITÁ ed $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.

f misurabile si dice sommabile, e scriveremo $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, se $\int |f| < \infty$.

In tal caso $\int_X f \quad := \quad \int_X f^+ - \int_X f^-$.

Proposizione 1. Siano $f, g \in \mathcal{L}^1$, $t, s \in \mathbf{R}$. Allora

(i) $tf + sg \in \mathcal{L}^1$ e $\int tf + sg = t\int f + s\int g$

(ii) $f \le g, \quad \Rightarrow \int f \le \int g$. In particolare, $|\int f| \le \int |f|$

(iii) $\int |f| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{f \ne 0\}$ ha misura nulla (f é nulla q. o.)

(iv) $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$ e $\{|f| \ne 0\}$ é $\sigma-$**finito**, cioé

esistono E_j misurabili e di misura finita tali che $\{|f| \ne 0\} \subset \cup_j E_j$.

Prova di (i). Intanto, $(f+g)^+ \le f^+ + g^+, (f+g)^- \le f^- + g^- \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}^1$. Poi, $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \Rightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \Rightarrow \int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+ \Rightarrow$

$$\int f+g = \int (f+g)^+ - \int (f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$$

Prova di (iii). φ indica una funzione semplice: $\int |f| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (0 \le \varphi \le |f| \Rightarrow \int \varphi = 0) \Leftrightarrow (0 \le \varphi \le |f| \Rightarrow \mu(\{\varphi \ne 0\} = 0) \Leftrightarrow \mu(\{|f| \ne 0\} = 0$

Prova di (iv). $\int |f| \ge \int |f| \ \chi_{\{|f| \ge n\}} \ge n\,\mu(\{|f| \ge n\}) \Rightarrow \mu(\{|f| = +\infty\}) \le \mu(\{|f| \ge n\}) \le \frac{1}{n} \int |f| \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Poi,
$\{f \ne 0\} = \cup_n \{|f| \ge \frac{1}{n}\}$ e $+\infty > \int |f| \ge \int |f| \ \chi_{\{|f| \ge \frac{1}{n}\}} \ge \frac{1}{n}\mu(\{|f| \ge \frac{1}{n}\})$

Teorema 1 (Lebesgue) *Siano $f_n \in \mathcal{L}^1$. Se f_n é equidominata (se esiste cioé g sommabile tale che $|f_n(x)| \le g(x)$ quasi per ogni x) e f_n converge ad f q.o., allora $f \in \mathcal{L}^1$ ed $\int |f_n - f| \to_n 0$.*

Prova. Se f_n converge ad f q.o., esiste N tale che

$\mu(N) = 0$, $|f_n(x) - f(x)| \to 0 \ \ \forall x \notin N$ e $|f_n(x) - f(x)| \le 2g(x) \ \ \forall x \notin N$

e ció assicura che $\int |f_n(x) - f(x)| = \int |f_n(x) - f(x)| \chi_{N^c} \to 0$.

COMPLETEZZA

Una successione di funzioni sommabili f_n soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza in media se

$$\forall \epsilon > 0\,, \qquad \exists n_\epsilon : \qquad n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int |f_n - f_m| \ \leq \epsilon \qquad (C)$$

Se f_n converge in media, f_n é necessariamente di Cauchy (i.e. soddisfa (C)). Viceversa, se f_n soddisfa (C) , allora f_n converge in media a una funzione sommabile f:

Teorema *Se* f_n *é una successione di funzioni sommabili, allora* f_n *converge in media se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy* (C).

Dimostrazione. La necessitá é ovvia; proviamo la sufficenza. Da (C):

$$\exists n_k : \quad \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \ \leq \ \frac{1}{2^k}$$

Posto $\quad g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}, \quad$ dal Teorema di B. Levi otteniamo

$$\int \left[\sum_k |g_k| \right] d\mu \ = \ \sum_k \left[\int |g_k|\, d\mu \right] \ = \ \sum_k \frac{1}{2^k} \ < \ +\infty \qquad \text{cioé}$$

$$g \ := \ \sum_k \ |g_k| \qquad \text{é sommabile e quindi finita q.o.,} \qquad \text{e quindi}$$

la serie $\sum_k g_k$ converge q.o., ovvero $\quad f(x) := \lim f_{n_k}$ esiste q.o. $\quad$ Inoltre,

$$|f_{n_k}| \ \leq |f_1| + g \quad \text{e quindi} \qquad \int |f_{n_k} - f| \to 0 \quad \text{(convergenza dominata)}$$

Da (C): $\qquad \int |f_n - f| \leq \int |f_n - f_{n_k}| + \int |f_{n_k} - f| \leq \epsilon \quad$ se $\quad n, n_k \geq n_e$

NOTA. Dalla dimostrazione:

f_n di Cauchy $\ \Rightarrow \ \exists \ f_{n_k}$ equidominata e convergente quasi ovunque.

Definizione di $L^1(\mu)$. $\quad L^1(\mu) = \{[f] : \int |f| < \infty\}, \quad [f] := \{g : \quad g = f \ q.o.\}$

Possiamo riformulare i fatti mostrati dicendo che

$$\to \qquad \|f\| \ := \int |f| \qquad \text{é una norma su} \qquad L^1(\mu)$$

$$\to \qquad (L^1, \|f\|) \qquad \text{é uno spazio di Banach}$$

Esercizi e complementi 2

Insieme di Cantor, funzione di Cantor

Dato un intervallo chiuso $I = [a,b]$, l'intervallo aperto $J := (a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3})$ é "intervallo centrale", $I_1 = [a, a + \frac{b-a}{3}]$, $I_2 = [b - \frac{b-a}{3}, b]$ sono i "restanti". Iterando, a partire da $I_0 = [0,1]$ l'operazione di "selezione" dell'intervallo centrale, si trova

$$[0,1] = O \cup C, \qquad O := \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} J_{nj}, \qquad C := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^n} I_{nj}$$

ove J_{nj}, I_{nj} sono intervalli aperti (risp. chiusi) di lunghezza $\frac{1}{3^n}$, per cui

$$L^1(\cup_{j=1}^{2^n} I_{nj}) = (\frac{2}{3})^n, \qquad L^1(C) = 0, \qquad L^1(O) = 1$$

L'insieme C é **"insieme di Cantor"**.

Sia $$g_n(t) = (\frac{3}{2})^n \sum_1^{2^n} \chi_{I_{nj}}, \qquad f_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$$

Da $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2^n}$ $\forall x \in [0,1])$ segue che f_n converge uniformemente, diciamo ad f.

Tale funzione é detta **funzione di Cantor**. Ecco alcune **sue proprietá:**

$$f \text{ é non decrescente}, \ f(0) = 0, f(1) = 1, \ f \equiv cost. \text{ in } J_{nj} \quad \forall \ n, j$$

$f(O) = \{\frac{k}{2^n} : \ k, n \in \mathbf{N}\}$. Dunque $f(O)$ é numerabile e $L^1(f(O)) = 0$

Dunque $L^1(f(C)) = 1$ (in particolare, C non é numerabile).

Esercizio 1.1. Sia $g(x) = \frac{x+f(x)}{2}$, $x \in [0,1]$, f funzione di Cantor.

Provare che g ha inversa continua e che $L^1(g(C)) = \frac{1}{2}$.

1. Funzioni misurabili e misure

Esercizio 2.1. Provare che f misurabile $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \Sigma \quad \forall B \subset \mathbf{R}$ Boreliano.

Esercizio 2.2. Sia f_n una successione di funzioni misurabili.

Provare che l'insieme $\{x : \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}$ è misurabile.

Esercizio 2.3. Provare che ogni funzione monotona di $\mathbf{R}$ in se' é misurabile.

Esercizio 2.4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localmente Lipschtziana.

Provare che f trasforma insiemi di misura (di Lebesgue) nulla in insiemi di misura nulla.

Mostrare con un esempio che le funzioni continue non hanno, in generale, questa proprietà.

Esercizio 2.5. Provare la falsitá della seguente affermazione

f misurabile $E \subset \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow$ $f(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Se f é la funzione di Cantor, prendere $A \subset f(C)$ non misurabile (perché esiste?)...

Esercizio 2.6. Provare la falsitá delle seguenti affermazioni

(i) f misurabile $E \subset \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow f^{-1}(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Sia $f = g^{-1}$, g come nell'esercizio 3 ed $E = g^{-1}(A)$, $A \subset g(C)$ non misurabile.

(ii) $L^1(E) = 0 \Rightarrow E$ é boreliano

(iii) L^1, ristretta alla σ-algebra dei boreliani, é misura completa

Esercizio 2.7. Siano f, g Lebesgue misurabili in $\mathbf{R}$. Provare che

$$g^{-1}(B) \text{ é boreliano se } B \text{ é boreliano} \Rightarrow g \circ f \text{ é misurabile}$$

e che la implicazione é falsa se g é soltanto misurabile.

3. Integrazione

Una Formula di rappresentazione per l'integrale.
Sia $f \geq 0$ misurabile in (X, Σ, μ). Allora $t \to \mu(\{f > t\})$ é Riemann integrabile in $[0, M]$ $\forall M > 0$ e

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) \, dt$$

Prova della Formula di rappresentazione . $\mu(\{f > t\}$ é non crescente e quindi i suoi punti di discontinuitá sono numerabili, e quindi é Riemann integrabile. Poi, sia $\varphi = \sum_{j=1}^n t_j \chi_{E_j}$, $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$. Allora

$$\{x : \varphi(x) > t\} = \cup_{\{j:\ t_j > t\}} E_j \qquad \text{e quindi} \qquad \int\limits_0^\infty \mu(\{\varphi > t\})dt =$$

$$= t_1 \sum_{j=1}^n \mu(E_j) + (t_2 - t_1) \sum_{j=2}^n \mu(E_j) + \ldots + (t_n - t_{n-1})\mu(E_n) = \sum_{j=1}^n t_j \mu(E_j) = \int \varphi$$

Poi, se $\varphi_n \to f$, $\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f$, é $\{f > t\} = \cup_n \{\varphi_n > t\}$ unione crescente, e quindi $\mu(\{\varphi_n > t\}) \to \mu(\{f > t\})$ e quindi, per Beppo Levi,

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n d\mu = \lim_n \int\limits_0^\infty \mu(\{\varphi_n > t\})dt = \int\limits_0^\infty \mu(\{f > t\})dt$$

Esercizio 3.1. Sia $B := \{x \in \mathbf{R}^n :\ \|x\| \le 1\}$. Calcolare

$$I_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_B \qquad\qquad J_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_{B^c}$$

(usando la formula di rappresentazione) e concludere che

$$I_p < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p < n, \qquad\qquad J_p < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p > n$$

Esercizio 3.2. Siano f_n misurabili, $0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ per ogni n e q.o. x. Provare che $\exists n :\ \int f_n < +\infty \ \Rightarrow \ \int f_n \to \int \lim f_n$ e che l'ipotesi $\exists n :\ \int f_n < +\infty$ é essenziale.

Esercizio 3.3. Provare che $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \int |f| \le \sup \int |f_n|$

Esercizio 3.4. Sia μ la misura che conta su un certo insieme X. Provare che
(i) $\int_X |f|\, d\mu \ = \ \sup\{\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)| :\ \ A \subset X, \quad A \quad \text{finito}\}$
(ii) $\int_X |f|\, d\mu < +\infty \quad \Rightarrow \quad \{x :\ f(x) \ne 0\}$ é al piú numerabile

Esercizio 3.5. Sia μ misura su X, $E \subset X$ misurabile, $f : X \to \mathbf{R}$ misurabile, $p > 0$. Provare che
(i) $\mu(\{|f| \ge t\}) \ \le \ \frac{1}{t^p} \int |f|^p$
(ii) $\int |f|^p < \infty \ \Rightarrow \ \mu(\{|f| \ge t\}) \ = \ \circ(\frac{1}{t^p})$
Provare con un esempio che $\mu(\{|f| \ge t\}) \ = \ \circ(\frac{1}{t^p})$ non implica $\int |f|^p < \infty$.

Suggerimento. Considerare $f(x) = \frac{1}{|x \log x|}\, \chi_{(0, \frac{1}{e})}$.

4. Funzioni misurabili ed integrali secondo Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.

Teorema di Lusin.

Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile e di misura finita, f misurabile. Allora

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists K_\epsilon \subset A \text{ compatto } : L^N(A \setminus K_\epsilon) < \epsilon \text{ e } \ f_{|K_\epsilon} \text{ é continua}$$

Dimostrazione del Teorema di Lusin.

Dato $j \in \mathbf{N}$, siano I_{ij} intervalli disgiunti di lunghezza $\frac{1}{j}$ tali che $\cup_i I_{ij} = \mathbf{R}$.
É $A = \cup_i A_{ij}, \ A_{ij} := A \cap f^{-1}(I_{ij}) \ \ (A_{ij} \cap A_{lj} = \emptyset \text{ se } i \neq l!)$.
Siano $K_{ij}^\epsilon \subset A_{ij}$ compatti tali che $L^N(A_{ij} \setminus K_{ij}^\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2^{i+j+2}}$ $(K_{ij}^\epsilon \cap K_{lj}^\epsilon = \emptyset$ se $i \neq l!)$.
Siano $g_j \equiv \alpha_{ij} \in I_{ij}$ in K_{ij}^ϵ. Le g_j sono continue su $\cup_{i=1}^n K_{ij}^\epsilon \ \ \forall n$. Poi

$$L^N(A \setminus \cup_{i=1}^n K_{ij}^\epsilon) \to L^N(A \setminus \cup_{i=1}^\infty K_{ij}^\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2^{j+1}} \Rightarrow \exists \ n_j : \ L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Posto allora $K^\epsilon := \cap_j \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^\epsilon$, é $|g_j(x) - f(x)| < \frac{1}{j} \ \ \forall x \in K^\epsilon$ e quindi f é continua su K^ϵ. Infine $L^N(A \setminus K) \leq \sum_j L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^\epsilon) \leq 2\epsilon$.

Esercizio 4.1. Sia f misurabile e limitata in $\mathbf{R}^N$. Provare che

$\int_{\mathbf{R}^N} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} L^N(\{x : |f(x)| \ > \ \frac{1}{2^n}\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume limitata.

Esercizio 4.2. Sia f misurabile e limitata in $\mathbf{R}^N$. Provare che

(ii) $\int |f| < +\infty \Rightarrow \sum_n L^N(\{|f| \ > \ n\}) < \infty$

Si puó prescindere dall'ipotesi di limitatezza? É vero il viceversa?

Esercizio 4.3. Sia f misurabile in $\mathbf{R}^N$ e nulla fuori di una palla. Provare che

$\int_{\mathbf{R}^N} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n L^N(\{x : |f(x)| \geq 2^n\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume a supporto compatto.

CENNI DI SOLUZIONE

Esercizio 1.1 $\{x + f(x) : x \in J_{nj}\} = J_{nj} + c_{nj}$ se $f \equiv c_{nj}$ su J_{nj}. Dunque $L^1(g(O)) = \frac{1}{2}\sum_n \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = \frac{1}{2}$ e quindi $L^1(g(C)) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2.1 Osservare che la preimmagine di un aperto é misurabile (ogni aperto in $\mathbf{R}$ é unione numerabile di intervalli aperti). Provare quindi che se $f : X \to Y$ e $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ é σ-algebra, allora $\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \Sigma\}$ é sigma algebra.

Esercizio 2.2 $\{x : \exists \lim_n f_n(x)\} = \{x : \underline{\lim}_n f_n(x) = \overline{\lim}_n f_n(x)\}$

Esercizio 2.4 $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \;\Rightarrow\; l(f(I)) \leq Ll(I) \;\; \forall I$ intervallo . Poi, se f é la funzione di Cantor, $L^1(f(C)) = 1$.

Esercizi 2.5-6-7 Sia g come nell' esercizio 1.1. Sia $A \subset g(C)$ non misurabile (tale A esiste perché $g(C)$ ha misura positiva!), e sia $E = g^{-1}(A)$. Si ha:

5 $E \subset C$ ha misura nulla ed é quindi misurabile, mentre $g(E) = A$ non é misurabile.

6-(i) Se $h := g^{-1}, h^{-1}(E) = g(E) = A$ non é misurabile.

6-(ii) Sia E come in 6-(i). Se E fosse boreliano, $A = g(E) = h^{-1}(E) =$ sarebbe misurabile.

6-(iii) Sia $L^1(E) = 0$ con E non boreliano. Sappiamo che esiste un boreliano di misura nulla che contiene E. Siccome E non é boreliano, $L^1_{\mathcal{B}}$ non é completa.

7 Il controesempio é : $\chi_E \circ h = \chi_{h^{-1}(E)} = \chi_A$ (h come in 8-9). L'affermazione é ovvia: $\{g > c\}$ boreliano $\Rightarrow f^{-1}(\{g > c\})$ misurabile.

Esercizio 3.1 $L^n(\{x \in B : \frac{1}{\|x\|^p} > t\}) = vol(B)t^{-\frac{n}{p}}$ se $t \geq 1$ e vale $vol(B)$ se $t \leq 1$: $p < n \Rightarrow I_p = vol(B)[1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}}}] = vol(B)\frac{n}{n-p}$, $p \geq n \Rightarrow I_p = +\infty$.
Calcoli analoghi per J_p.

Esercizio 3.5

$$(i-ii)\int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p \geq t^p \mu(\{|f| \geq t\}) \Rightarrow \mu(\{|f| \geq t\}) \leq \frac{1}{t^p}\int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p = \frac{1}{t^p} \circ (1)$$

perché $\int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p \to_{t\to+\infty} \int_{\{|f|=+\infty\}} |f| = 0$ se $\int |f|^p < +\infty$.

Esercizio 4.1 Sia $g(t) = L^N(\{|f| > t\})$, cosicché g é monotona decrescente e

$$(i) \int |f| = \int_0^{\infty} g(t)dt \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g + \int_1^{\infty} g, \quad g(\frac{1}{2^{n-1}})\frac{1}{2^n} \;\leq\; \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g \;\leq\; g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$$

Dunque $\int |f| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$ mentre $\int_1^{\infty} g \leq g(1)\|f\|_{\infty} \Rightarrow$

$\int |f| \leq g(1)\|f\|_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n} \leq \; max\{1, \|f\|_{\infty}\} \; \sum_{n=0}^{\infty} g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$.

Controesempio: $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{(0,1)}(x) \;\; x \in \mathbf{R}$.
É $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} L^1(\{f > \frac{1}{2^n}\}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} < +\infty$ ma l'integrale diverge.

(ii) $\int |f| = \int_0^{\infty} g \geq \sum_{n\geq 1} g(n)$ e quindi l'ipotesi di limitatezza non entra. Il viceversa é in generale falso: se $|f(x)| \leq 1 \;\; \forall x$ la serie converge (serie di zeri!) ma, in generale, $\int |f| = +\infty$.

Esercizio 4.3 Come sopra,

$$\int |f| = \int_0^1 g + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} g \geq g(1) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^n g(2^n) \geq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n g(2^n)$$

indipendentemente dal fatto che f sia a supporto comptto. Viceversa, se $f \equiv 0$ fuori della palla B_r, allora $L^N(\{|f| > 0\}) \leq vol(B_r)$ e quindi $g \leq vol(B_r)$ e quindi $\int |f| = \int_0^1 g + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} g \leq vol(B_r) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n g(2^n)$.

Controesempio. $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{[2,+\infty)}(x)$: la serie é una serie di zeri, ma l'integrale diverge.