Tutorato di AM210 - Soluzioni

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 5: Differenziabilità, massimi e minimi in più variabili

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Soluzione Esercizio 5.0. Sia $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dalla differenziabilità di f in un generico punto x_0, abbiamo che, se $|t|$ è sufficientemente piccolo

$$f(x_0 + t\boldsymbol{\nu}) - f(x_0) = t\,\langle \nabla f(x_0), \boldsymbol{\nu}\rangle + \mathrm{o}\left(|t|\right)$$

quindi, dividendo per t ed effettuando il limite per $t \to 0$, otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\boldsymbol{\nu}) - f(x_0)}{t} = \langle \nabla f(x_0), \boldsymbol{\nu}\rangle$$

La linearità dell'applicazione L_{x_0} segue immediatamente dalla linearità del prodotto scalare: infatti, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} L_{x_0}(\alpha\boldsymbol{\nu} + \beta\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial f}{\partial\left(\alpha\boldsymbol{\nu} + \beta\boldsymbol{\xi}\right)}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \alpha\boldsymbol{\nu} + \beta\boldsymbol{\xi}\rangle = \\ &= \alpha\,\langle \nabla f, \boldsymbol{\nu}\rangle + \beta\,\langle \nabla f, \boldsymbol{\xi}\rangle = \alpha L_{x_0}(\boldsymbol{\nu}) + \beta L_{x_0}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 5.1. Considerato lo sviluppo di Taylor di $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ in un punto generico $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$f\left(x_0 + h, y_0 + k\right) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0), (h,k)\rangle + \mathrm{o}(\sqrt{h^2 + k^2}), \quad (h,k) \in \mathbb{R}^2$$

dove $\nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, 4y_0)$. Il piano tangente sarà definito da

$$\begin{array}{cccc} T_p: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (h,k) & \mapsto & (x_0 + h, y_0 + k, f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0), (h,k)\rangle) \end{array}$$

cioè $T_p(h,k) = \left(x_0 + h, y_0 + k, x_0^2 + 2y_0^2 + 2x_0 h + 4y_0 k\right)$. Le coordinate del piano tangente saranno quindi

$$\begin{cases} x = x_0 + h \\ y = y_0 + k \\ z = x_0^2 + 2y_0^2 + 2x_0 h + 4y_0 k \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 5.2.

(5.2.1) Consideriamo la mappa

$$\mathbf{x}(u,v) := (\mathbf{x}_1(u,v), \mathbf{x}_2(u,v), \mathbf{x}_3(u,v)) = \left(u, v, c\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}}\right)$$

Sostituendo $\mathbf{x}(u,v)$ nell'equazione dell'ellisse otteniamo

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{c^2\left(1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right)}{c^2} = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} + 1 = 1$$

Concludiamo che $\mathbf{x}(u,v)$ soddisfa l'equazione dell'ellissoide ed è quindi parametrizzazione

(5.2.2) Osservato che $x_0 = \mathbf{x}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, dalla rappresentazione con la formula di Taylor al primo ordine di $\mathbf{x}(u,v)$ in $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+h, \frac{b}{\sqrt{3}}+k\right) \\ \mathbf{x}_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+h, \frac{b}{\sqrt{3}}+k\right) \\ \mathbf{x}_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+h, \frac{b}{\sqrt{3}}+k\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{3}} \\ \frac{b}{\sqrt{3}} \\ \frac{c}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla\mathbf{x}_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \\ \nabla\mathbf{x}_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \\ \nabla\mathbf{x}_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \mathrm{o}(\sqrt{h^2+k^2})$$

deduciamo la forma del piano tangente la superficie nel punto $x_0 = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}})$, ovvero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{3}} \\ \frac{b}{\sqrt{3}} \\ \frac{c}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla\mathbf{x}_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \\ \nabla\mathbf{x}_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \\ \nabla\mathbf{x}_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Ora

— $\nabla\mathbf{x}_1(u,v) \equiv (1,0)$ e quindi $\nabla\mathbf{x}_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = (1,0)$

— $\nabla\mathbf{x}_2(u,v) \equiv (0,1)$ e quindi $\nabla\mathbf{x}_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = (0,1)$

— $\nabla\mathbf{x}_3(u,v) = \left(-\frac{cu}{a^2\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}}, -\frac{cv}{b^2\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}}\right)$ e quindi $\nabla\mathbf{x}_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{c}{a}, -\frac{c}{b}\right)$

Segue che il piano tangente all'ellissoide in x_0 sarà:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{3}} \\ \frac{b}{\sqrt{3}} \\ \frac{c}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{c}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{3}} + h \\ y = \frac{b}{\sqrt{3}} + k \\ z = \frac{c}{\sqrt{3}} - \frac{c}{a}h - \frac{c}{b}k \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 5.3. Dalle regola della catena, abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}, \frac{\partial f}{\partial \theta}\right), \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}, \frac{\partial f}{\partial \theta}\right), \left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \varrho}\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \theta} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - \\
&- \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{y}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\right) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\sin^2\theta}{\varrho} + \cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varrho}\frac{\sin\theta}{\varrho}\right) - \\
&- \left(-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\varrho^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin\theta}{\varrho}\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varrho} - \frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)\right) = \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varrho} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varrho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}\cos^2\theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\varrho^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial f}{\partial \varrho} + \sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{\varrho}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\right) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\cos^2\theta}{\varrho} + \sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varrho}\right) - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\varrho^2} + \frac{\cos\theta}{\varrho}\left(\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varrho} + \frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) = \\
&= \frac{\cos^2\theta}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varrho} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varrho} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\varrho^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{\varrho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

Di conseguenza, in coordinate polari

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Da tale espressione segue subito che $u(x,y) := \log\left(x^2+y^2\right)$ è soluzione di $\Delta u = 0$: infatti, in coordinate polari, $u(\varrho,\theta) = 2\log(\varrho)$, e quindi

$$\Delta u = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{2}{\varrho}\right) = 0$$

Soluzione Esercizio 5.4. Essendo $f(t,g(t)) \equiv 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, allora definendo $\gamma(t) \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^2\right)$ come $\gamma(t) := (t,g(t))$ si ha $\dot\gamma(t) = (1,g'(t))$ e dunque, per la regola di derivazione di funzioni composte, si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t,g(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma(t)) = \langle\nabla f(t,g(t)),\dot\gamma(t)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(t,g(t))\dot\gamma_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,g(t))\dot\gamma_2(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t,g(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,g(t))g'(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

in particolare, essendo $g(0) = 0$, per $t = 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)g'(0) = 0$ e quindi, se $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$ allora $g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}$

Soluzione Esercizio 5.5.

(5.5.1) Si ha

$$\nabla F(x,y) = \left(2y\log\left(1+4x^2y^2+\sin(2xy)\right) - e^x\log\left(1+(e^x+y)^2+\sin(e^x+y)\right),\right.$$
$$\left. 2x\log\left(1+4x^2y^2+\sin(2xy)\right) - \log\left(1+(e^x+y)^2+\sin(e^x+y)\right)\right)$$

(5.5.2) Abbiamo

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ ze^x & 0 & e^x \end{pmatrix}, \quad J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -\frac{2xy}{(1+x^2)^2} & \frac{1}{1+x^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalla regola della catena

$$J_{g\circ f}(x,y) = J_g(f(x,y))J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+1} & x^2+y & 0 \\ (x+y)e^{x^2+y} & 0 & e^{x^2+y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -\frac{2xy}{(1+x^2)^2} & \frac{1}{1+x^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2xy}{1+x^2} - \frac{2xy(x^2+y)}{(1+x^2)^2} & \frac{y}{1+x^2} + \frac{x^2+y}{1+x^2} \\ e^{x^2+y} + 2e^{x^2+y}x(x+y) & e^{x^2+y} + e^{x^2+y}(x+y) \end{pmatrix}$$

Soluzione Esercizio 5.6.

(5.6.1) $f_1(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$:

$$\nabla f_1(x,y) = \left(4x^3-4x, 4y-4y^3\right) = (0,0) \iff x = 0 \vee \pm 1 \text{ e } y = 0 \vee \pm 1$$

dunque abbiamo nove punti critici. La matrice Hessiana è

$$H_{f_1}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & 4-12y^2 \end{pmatrix}$$

dunque l'origine è un punto di sella perché

$$H_{f_1}(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ha due autovalori di segno discorde; analogamente, sono selle anche i quattro punti $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$, perché

$$H_{f_1}(\pm 1, 1) = H_{f_1}(\pm 1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$(1,0)$ e $(-1,0)$ sono invece due punti di minimo locale, perché

$$H_{f_1}(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

è strettamente definita positiva, mentre $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono punti di massimo perché

$$H_{f_1}(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

ha entrambi gli autovalori negativi

(5.6.2) $f_2(x,y) = xy\left(x^2+y^2-1\right)$ e

$$\nabla f_2(x,y) = \left(y\left(x^2+y^2-1\right)+2x^2y, x\left(x^2+\ y^2-1\right)+2xy^2\right) = \left(y\left(3x^2+y^2-1\right), x\left(x^2+3y^2-1\right)\right)$$

Vogliamo $\nabla f_2(x,y) = (0,0)$: consideriamo i vari casi possibili per i quali ciò avviene:

— $(x,y) = (0,0)$

— Se $y = 0$ e $x \neq 0$, si dovrà necessariamente avere

$$0 = x^2+3y^2-1 = x^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

cioè $(x,y) = (\pm 1, 0)$

— Se $x = 0$ e $y \neq 0$

$$0 = 3x^2+y^2-1 = y^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1$$

i.e., $(x,y) = (0, \pm 1)$

— Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, dovremo soddisfare

$$\begin{cases} 3x^2+y^2-1 = 0 \\ x^2+3y^2-1 = 0 \end{cases}$$

sommando membro a membro, otteniamo $x^2 = y^2$, che sostituita, ad esempio, nella prima equazione, fornisce $x = \pm\frac{1}{2}$, e quindi avremo i punti $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Riassumendo, abbiamo 9 punti critici:

$$(0,0) \quad (1,0) \quad (-1,0) \quad (0,1) \quad (0,-1)$$

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

La matrice hessiana è

$$H_{f_2}(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2+3y^2-1 \\ 3x^2+3y^2-1 & 6xy \end{pmatrix}$$

quindi l'origine, $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$ sono punti di sella perché

$$H_{f_2}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$H_{f_2}(\pm 1, 0) = H_{f_2}(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno determinante negativo. I punti $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ sono di minimo relativo perché

$$H_{f_2}\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

ha determinante e traccia positiva, mentre $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$ sono di massimo relativo in quanto

$$H_{f_2}\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

ha traccia negativa e determinante positivo.

(5.6.3) $f_3(x,y) = x^3 - 3xy^2$; $\nabla f_3(x,y) = \left(3x^2 - 3y^2, -6xy\right)$ si annulla solo in $(0,0)$: la matrice Hessiana

$$H_{f_3}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 6x \end{pmatrix}$$

è identicamente nulla nell'origine, quindi non ci dà informazioni: tuttavia, studiando il segno della funzione notiamo che $f_3(0,0) = 0$ e in ogni intorno dell'origine ci sono sia punti in cui la funzione assume valori positivi (ad esempio, $f_3\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^3}$) sia punti in cui assume valori negativi (ad esempio, $f_3\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = -\frac{2}{n^3}$), e dunque l'origine non può essere né un punto di massimo né di minimo relativo.

(5.6.4) $f_4(x,y) = x^4 - x^3 \sin y$; $\nabla f_4(x,y) = \left(4x^3 - 3x^2 \sin y, -x^3 \cos y\right)$ si annulla in tutti i punti in cui $x = 0$ e in quelli in cui $\cos y = 0$ e $x = \frac{3}{4}\sin y$, ovvero nei punti del tipo $\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$

$$H_{f_4}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 6x\sin y & -3x^2 \cos y \\ -3x^2 \cos y & x^3 \sin y \end{pmatrix}$$

dunque i punti $\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$ sono dei minimi perché

$$H_{f_4}\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = H_{f_4}\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{27}{64} \end{pmatrix}$$

mentre

$$H_{f_4}(0,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non ci dà informazioni. Tuttavia, studiando il segno della funzione notiamo che intorno a ogni punto dell'asse y ci sono sia punti in cui la funzione è positiva sia punti in cui è negativa, dunque sono tutti punti di sella.

(5.6.5) $f_5(x,y,z) = \sin(xyz)$; $\nabla f(x,y) = (yz\cos(xyz), xz\cos(xyz), xy\cos(xyz))$ si annulla in tutti i punti in cui due delle tre coordinate sono nulle e in quelli in cui $xyz = \frac{\pi}{2} + k\pi$: i punti del primo tipo sono tutti di sella perché intorno ad ogni punto per cui $xyz = 0$ ci sono punti in cui $xyz > 0$ (con $\sin(xyz) > 0$) e altri in cui in cui $xyz < 0$ (con $\sin(xyz) < 0$); i punti in cui $xyz = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sono tutti di massimo assoluto, perché

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 \geq \sin(xyz) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e dunque in particolare sono di massimo relativo; analogamente, i punti dove $xyz = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ sono di minimo relativo perché

$$\sin(xyz) \geq -1 = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$$

(5.6.6) I punti stazionari di $f_6(x,y) = \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$ sono quelli in cui $\nabla f_6(x,y) = (0,0)$

$$\nabla f_6(x,y) = \left(2x\left(y^2 - 1\right), 2y\left(x^2 - 1\right)\right) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x\left(y^2 - 1\right) = 0 \\ 2y\left(x^2 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $P_1 = (0,0), P_2 = (1,1), P_3 = (-1,1), P_4 = (-1,-1), P_5 = (1,-1)$. Per vedere se sono punti di massimo o di minimo occorre studiare la matrice hessiana della funzione

$$H_{f_6}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\left(y^2 - 1\right) & 4xy \\ 4xy & 2\left(x^2 - 1\right) \end{pmatrix}$$

nell'origine la matrice hessiana è definita negativa, cioè ha entrambi gli autovalori negativi, perché

$$H_{f_6}(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

quindi P_1 è un punto di massimo. Nei punti P_2, P_4 la matrice hessiana è

$$H_{f_6}(1,1) = H_{f_6}(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

che avendo determinante negativo ha autovalori di segno opposto e quindi P_2, P_4 non sono di massimo né di minimo; Nei punti P_3, P_5 la matrice hessiana ha la forma

$$H_{f_6}(-1,1) = H_{f_6}(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

e analogamente i punti P_3, P_5 non sono massimi né minimi.

(5.6.7) $f_7(x,y) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + y^4 - 2y^2$. I punti critici sono quelli che rispettano la condizione $\nabla f_7(x,y) = (0,0)$:

$$\nabla f_7(x,y) = \big(4x^3 - 12x^2 + 8x, 4y^3 - 4y\big) = (0,0) \iff \begin{cases} 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha soluzioni

$$P_1 := (0,0),\ P_2 := (0,-1),\ P_3 := (0,1),\ P_4 := (1,-1),\ P_5 := (1,0)$$

$$P_6 := (1,1),\ P_7 := (2,-1),\ P_8 := (2,0),\ P_9 := (2,1)$$

Studiamo l'hessiana di $f(x,y)$ in questi punti:

$$H_{f_7}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 24x + 8 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

— P_1 non è di massimo né di minimo perchè l'hessiana ha autovalori di segno opposto in quanto

$$H_{f_7}(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

— P_2, P_3 sono di minimo relativo perchè l'hessiana calcolata nei punti è definita positiva, cioè ha entrambi gli autovalori positivi, perché

$$H_{f_7}(0,-1) = H_{f_7}(0,-1) \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

— P_4, P_6 non sono né massimi né minimi in quanto l'hessiana ha autovalori di segno opposto perché

$$H_{f_7}(1,1) = H_{f_7}(1,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

— P_7, P_9 sono di minimo relativo perchè la matrice hessiana è definita positiva dal momento che

$$H_{f_7}(2,-1) = H_{f_7}(2,1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

— P_5 è di massimo relativo perchè l'hessiana è definita negativa, cioè ha entrambi gli autovalori negativi, poiché

$$H_{f_7}(1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

— P_8 è di minimo perchè l'hessiana ha autovalori di segno opposto:

$$H_{f_7}(2,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(5.6.8) $f_8(x,y) = y^4 - y^3 \cos x$. Cerco i punti di $\mathbb{R}^2$ che annullino il gradiente

$$\nabla f_8(x,y) = \big(y^3 \sin x, 4y^3 - 3y^2 \cos x\big) = (0,0) \iff \begin{cases} y^3 \sin x = 0 \\ 4y^3 - 3y^2 \cos x = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha per soluzioni la retta $y = 0$ e i punti $P_k = \left(k\pi, (-1)^k \frac{3}{4}\right)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. L'hessiana di $f_8(x,y)$ è della forma

$$H_{f_8}(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 \cos x & 3y^2 \sin x \\ 3y^2 \sin x & 12y^2 - 6y \cos x \end{pmatrix}$$

Nei punti $y = 0$ la matrice hessiana è la matrice nulla perché

$$H_{f_8}(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque non si può dire nulla sulla natura dei punti; tuttavia, lungo la direzione $y = 0$ la funzione è nulla e cambia di segno nell'intorno di ognuno di questi punti, dunque nessuno di questi è di massimo né di minimo locale; nei punti P_k l'hessiana è della forma

$$H_{f_8}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{27}{64} & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

e dunque i punti sono di minimo relativo

(5.6.9) $f_9(x,y,z) = \sin^2(xyz)$;

$$\nabla f_9(x,y,z) = (2yz \cos(xyz) \sin(xyz), 2xz \cos(xyz) \sin(xyz), 2xy \cos(xyz) \sin(xyz))$$

si annulla in tutti e soli i punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $xyz = \dfrac{k\pi}{2}$ per $k \in \mathbb{Z}$; per stabilire quali sono di massimo e quali di minimo è sufficiente notare che, essendo $0 \leq \sin^2(xyz) \leq 1$, se $xyz = k\pi$ allora (x,y,z) è un minimo perché $f_9(x,y,z) = 0$ mentre se $xyz = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ il punto (x,y,z) è di massimo perché $f(x,y,z) = 1$.