Tutorato di AM210 - Soluzioni

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 4: Derivazione in più variabili

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Soluzione Esercizio 4.1.

(4.1.1) $f_1(x,y)$ è differenziabile al di fuori dell'origine, perché rapporto di funzioni differenziabili; nell'origine la funzione ammette derivate parziali, entrambe nulle, perché, essendo nulla lungo gli assi, si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(h,0)-f_1(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Le derivate direzionali non esistono (a meno che non siano lungo direzioni parallele ad uno degli assi coordinati): infatti

$$\lim_{t\to 0^\pm} \frac{f_1(th,tk)-f_1(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{t^2hk}{t\sqrt{t^2h^2+t^2k^2}} = \pm\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Inoltre la funzione non è differenziabile nell'origine perché

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_1(h,k)-f_1(0,0)-\langle \nabla f_1(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} \neq 0$$

perché per $h=k$ questa quantità vale costantemente $\frac{1}{2}$.

(4.1.2) $f_2(x,y)$ è chiaramente differenziabile all'infuori dell'origine. In $(0,0)$ ammette derivate parziali entrambe nulle, perché essendo $f_2(x,0)=0=f_2(0,y)\ \forall x,y$, allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_2(h,0)-f_2(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 = \lim_{k\to 0} \frac{f_2(0,k)-f_2(0,0)}{k}$$

Inoltre, la funzione ha derivate direzionali perché

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_2(th,tk)-f_2(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3hk^2}{t\,(t^2h^2+t^4k^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{hk^2}{h^2+t^2k^4} = \begin{cases} \frac{k^2}{h} & \text{se } h\neq 0 \\ 0 & \text{se } h=0 \end{cases}$$

tuttavia, la funzione non è differenziabile perché

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_2(h,k)-f_2(0,0)-\langle \nabla f_2(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}$$

che vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$ lungo la direzione $h=k$.

(4.1.3) $f_3(x,y)$ ammette derivate parziali entrambe nulle in $(0,0)$: infatti

$$f_3(x,0)=0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_3(h,0)-f_3(0,0)}{h} = 0$$

mentre

$$f_3(0,y) = y^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_3(0,h) - f_3(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{h} \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

Inoltre, f_3 è differenziabile (e quindi ammette derivate direzionali) poiché

$$\left| \frac{f_3(h,k) - f_3(0,0) - \langle \nabla f_3(0,0), (h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \left| \frac{\varrho^{\frac{4}{3}} \sin(\theta)^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{\varrho^4 \cos^4\theta + \varrho^2 \sin^2\theta}\right)}{\varrho} \right| \leq \sqrt[3]{\varrho} \xrightarrow[\varrho\to 0]{} 0$$

dove abbiamo effettuato un passaggio in coordinate polari, $(h,k) = (\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)$

(4.1.4) f_4 ammette nell'origine derivata parziale solo nella variabile x: infatti

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(h^8\right)^{\frac{1}{4}}}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

mentre

$$\left(\frac{\partial f_4}{\partial y}\right)_{\pm}(0,0) = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \pm\infty$$

Quindi la derivata parziale lungo la variabile y non esiste. In particolare, segue che f_4 non è differenziabile. Vediamo poi che f_4 ammette derivate direzionale solo lungo direzioni paralle all'asse x, i.e. della forma $\boldsymbol{\nu} = (h,0)$: infatti, se $\boldsymbol{\nu} = (h,k)$

$$\left(\frac{\partial f_4}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)_{\pm}(0,0) = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{\left(t^8h^8 + t^2k^2\right)^{\frac{1}{4}}}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|t|}\left(t^6h^8 + k^2\right)^{\frac{1}{4}}}{t} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } k \neq 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

(4.1.5) f_5 ammette derivate parziali nell'origine: infatti

$$\frac{\partial f_5}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_5(h,0) - f_5(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{h^2}-1}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2} - 1 - h^2}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{2e^{h^2} - 2}{3h} = \lim_{h\to 0} \frac{4he^{h^2}}{3} = 0$$

e

$$\frac{\partial f_5}{\partial y}(0,0) = 0$$

con un conto del tutto analogo al precedente. Inoltre, f_5 è differenziabile (e quindi ammette derivate direzionali) poiché

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{e^{h^2+k^2}-1}{h^2+k^2} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\frac{e^{\varrho^2}-1}{\varrho^2} - 1}{\varrho} = 0$$

(4.1.6) Poiché

$$f_6(x,0,0) = f_6(0,y,0) = f_6(0,0,z) = 0 \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

si ha

$$\frac{\partial f_6}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial f_6}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f_6}{\partial z}(0,0,0) = 0$$

Inoltre, f_6 ammette tutte le derivate direzionali: infatti, se $\boldsymbol{\nu} = (h,k,\ell) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ si ha

$$\frac{\partial f_6}{\partial \boldsymbol{\nu}}(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk,t\ell) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2h^2tkt^2\ell^2}{t\left(t^4h^4 + t^4k^4 + t^4\ell^4\right)} = \frac{h^2k\ell^2}{h^4 + k^4 + \ell^4}$$

f_6 non è però differenziabile: infatti, lungo la direzione $h = k = \ell$, si ha

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f_6(h,h,h) - f_6(0,0,0) - \langle \nabla f_6(0,0,0), (h,h,h)\rangle}{||(h,h,h)||} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\operatorname{sign}(h)}{3\sqrt{3}} = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4.2. Abbiamo $f(g(t)) = e^{2t}\log\left(1+e^{2t}t^2\right)$, quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t)) = 2e^{2t}\log\left(1+e^{2t}t^2\right) + \frac{2te^{4t}}{1+e^{2t}t^2}(1+t)$$

Invece

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\log\left(1+x^2y^2\right) + \frac{2x^3y^2}{1+x^2y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{1+x^2y^2}$$

quindi

$$\left\langle \nabla f(g(t)), g'(t)\right\rangle = \left\langle \left(2e^t\log 1+e^{2t}t^2 + \frac{2e^{3t}t^2}{1+x^2y^2}, \frac{2e^{4t}t}{1+e^{2t}t^2}\right), \left(e^t,1\right)\right\rangle = 2e^{2t}\log\left(1+e^{2t}t^2\right) + \frac{2e^{4t}t}{1+e^{2t}t^2}(1+t)$$

Da tali calcoli si deduce allora $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t)) = \left\langle \nabla f(g(t)), g'(t)\right\rangle$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4.3. Ricordiamo che

$$\begin{cases} x = x(\varrho,\theta) = \varrho\cos(\theta) \\ y = y(\varrho,\theta) = \varrho\sin(\theta) \end{cases}, \quad \begin{cases} \varrho = \varrho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \theta(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Quindi, per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}(\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta)), \frac{\partial f}{\partial \theta}(\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta))\right), \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\right\rangle = \\ &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial \varrho}(\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta)) - \frac{\sin(\theta)}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta))\end{aligned}$$

poiché

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\varrho\cos(\theta)}{\varrho} = \cos(\theta), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin(\theta)}{\varrho}$$

Analogamente, si ha

$$\frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin(\theta), \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos(\theta)}{\varrho}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}(\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta)), \frac{\partial f}{\partial \theta}(\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta))\right), \left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\right\rangle = \\ &= \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \varrho}(\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta)) + \frac{\cos(\theta)}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta))\end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4.4.

(4.4.1) Poniamo

$$F(x) := \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

e notiamo che

$$\Phi(x,y) = F(b(x,y)) - F(a(x,y))$$

Quindi, se consideriamo, ad y fissato, le applicazioni $x \mapsto a(x,y)$ e $x \mapsto b(x,y)$, abbiamo (per il Teorema fondamentale del calcolo)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(b(x,y)) - F(a(x,y))\right) = f(b(x,y))\frac{\partial b}{\partial x}(x,y) - f(a(x,y))\frac{\partial a}{\partial x}(x,y)$$

e, analogamente, considerando (ad x fissato, questa volta), le applicazioni $y \mapsto a(x,y)$ e $y \mapsto b(x,y)$, otteniamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(F(b(x,y)) - F(a(x,y))\right) = f(b(x,y))\frac{\partial b}{\partial y}(x,y) - f(a(x,y))\frac{\partial a}{\partial y}(x,y)$$

(4.4.2) Per il punto precedente, si ha

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y) = e^{-\cos^2(x)}\sin(x), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) = e^{-\sin^2(y)}\cos(y)$$

e quindi

$$\nabla\Psi(x,y) = \left(e^{-\cos^2(x)}\sin(x), e^{-\sin^2(y)}\cos(y)\right)$$

Soluzione Esercizio 4.5.

(4.5.1) $f(x,y) := \sqrt[3]{xy}$ è chiaramente continua, ammette derivate parziali nulle perché è nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali (ad eccezione delle direzioni degli assi) perché

$$\lim_{t\to 0^\pm} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{t^2hk}}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \sqrt[3]{\frac{hk}{t}} = \pm\infty$$

(4.5.2) $f(x,y) := \sqrt[3]{x^2+y^2}$ è chiaramente continua nell'origine, ma non ammette derivate parziali perché

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \pm\infty$$

(analogamente non ha l'altra derivata parziale); inoltre, non possiede alcuna derivata direzionale perché

$$\lim_{t\to 0^\pm} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{t^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{h^2+k^2}}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \sqrt[3]{\frac{h^2+k^2}{t}} = \pm\infty$$

(4.5.3) Si considerino la parabola privata dell'origine

$$A := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| y = x^2\right\} \setminus \{(0,0)\}$$

e la funzione $f(x,y) := \chi_A((x,y))$; f non è continua nell'origine perché $f(x,x^2) \equiv 1\, \forall x \neq 0$, mentre $f(0,0) = 0$. Ammette derivate parziali entrambe nulle perché è identicamente nulla lungo gli assi, e ha anche le derivate direzionali perché

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

dato che per $|t|$ sufficientemente piccolo si ha $f(tx,ty) = 0$ (i.e., se $|t|$ è abbastanza piccolo, $(tx,ty) \neq (tx, t^2x^2)$, poiché altrimenti si avrebbe $y = |t|\, x^2$ per tutti i t sufficientemente piccoli in modulo, e questo è chiaramente assurdo)

(4.5.4) Se A è come nel punto (4.5.4), sia

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt[3]{xy} & \text{se } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus A \\ 1 & \text{se } (x,y)\in A \end{cases}$$

è discontinua nell'origine perché $f(x,x^2) \equiv 1\, \forall x \neq 0$ e $f(0,0) = 0$, ha derivate parziali nulle perché è identicamente nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali perché

$$\lim_{t\to 0^\pm} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{t^2xy}}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \sqrt[3]{\frac{hk}{t}} = \pm\infty$$

dato che per $|t|$ sufficientemente piccolo si ha $f(tx,ty) = \sqrt[3]{t^2xy}$