Tutorato di AM210

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 4: Derivazione in più variabili

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Esercizio 4.1. Studiare l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni

(4.1.1) $f_1(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(4.1.2) $f_2(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(4.1.3) $f_3(x,y) := \begin{cases} y^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(4.1.4) $f_4(x,y) := \sqrt[4]{x^8+y^2}$

(4.1.5) $f_5(x,y) := \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(4.1.6) $f_6(x,y,z) := \begin{cases} \frac{x^2yz^2}{x^4+y^4+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Esercizio 4.2. Siano $f(x,y) := x^2 \log\left(1+x^2y^2\right)$, $g(t) := (e^t, t)$. Verificare che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t)) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle$

Esercizio 4.3. Provare, utilizzando la regola di derivazione per funzioni composte, che l'espressione del gradiente in coordinate polari è

$$\nabla f = \left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial \varrho} - \frac{\sin\theta}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \quad \forall f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$$

Esercizio 4.4.

(4.4.1) Siano $a, b : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabili, $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Provare che se

$$\Phi(x,y) := \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(t)\mathrm{d}t$$

allora

$$\nabla\Phi(x,y) = \left(f(b(x,y))\frac{\partial b}{\partial x} - f(a(x,y))\frac{\partial a}{\partial x}, f(b(x,y))\frac{\partial b}{\partial y} - f(a(x,y))\frac{\partial a}{\partial y}\right)$$

(4.4.2) Utilizzando il punto (4.4.1), calcolare $\nabla\Psi(x,y)$, dove

$$\Psi(x,y) := \int_{\cos x}^{\sin y} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Esercizio 4.5. Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

(4.5.1) Continua, parzialmente derivabile ma derivabile non in tutte le direzioni.

(4.5.2) Continua ma non parzialmente derivabile e derivabile non in tutte le direzioni.

(4.5.3) Parzialmente derivabile, derivabile in ogni direzione ma discontinua.

(4.5.4) Parzialmente derivabile ma discontinua e derivabile non in tutte le direzioni.