AM2 2011-2012

RECUPERO II ESONERO

TEMA 1 . Provare la formula (di Stirling)

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s}\, \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;+\; \circ(1)\right], \qquad \circ(1) \to_{s\to+\infty} 0$$

ESERCIZIO 1. Illustrare i teoremi di dipendenza continua e di derivabilitá per integrali dipendenti da parametro, mostrando che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt \to_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

e come tale informazione permetta di calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

TEMA 2. Sia $f \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ e 2π periodica.

Provare che esiste una successione di polinomi trigonometrici convergente ad f uniformemente.

ESERCIZIO 2.

(i) Provare, usando le formule di Eulero (e la serie geometrica in $\mathbf{C}$), che

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2} \qquad \forall r \in [0,1), \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

(ii) Calcolare, integrando per parti ed usando l'esercizio 1, i coefficenti di Fourier di $f(r,t) := \arctan[\frac{r\sin t}{1-r\cos t}]$.

Scrivere, motivando, lo sviluppo di Fourier di $t \to f(r,t)$ per ogni $r \in [0,1)$.

TEMA 3 . Sia $f \in C_{2\pi}$. Provare che la serie di Fourier di f converge a f in tutti i punti $\tau \in [-\pi,\pi]$ tali che

$$\exists \delta = \delta(\tau): \qquad \sup_{|t|\le\delta} \left|\frac{f(t+\tau) - f(\tau)}{t}\right| < \infty$$

ovvero $\quad f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau} \quad$ in tutti i punti τ attorno ai quali il rapporto incrementale rimane limitato.

TEMA 4.

Enunciare e dimostrare il Principio delle Contrazioni ed indicarne una applicazione.

TEMA 5. Sia $F \in C^1(\mathbf{R}^n)$.

Enunciare e dimostrare un teorema di esistenza globale per il sistema differenziale

$$\dot{x} = F(x)$$

ESERCIZIO 3. Scrivere l'equazione (del secondo ordine)

$$u''(t) + \sin u(t) = 0$$

come sistema di due equazioni differenziali del primo ordine e riconoscerne il carattere Hamiltoniano.
Derivare quindi esistenza ed unicitá della soluzione del problema (di Cauchy)

$$u''(t) + \sin u(t) = 0, \quad u(0) = a, \quad u'(0) = b, \qquad (a, b) \in \mathbf{R}^2$$

e disegnare la traiettoria $(u(t), u'(t))$ al variare di $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
Discutere infine la prolungabilitá per tutti i tempi della soluzione del problema di Cauchy al variare di $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
Stabilire infine se per qualche dato iniziale (a, b) la soluzione é periodica.

ESERCIZIO 4. Determinare l'integrale generale di

$$y^{''''} + y^{'''} - 8y^{'} - 8y = \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$$