AM210: Tracce delle lezioni- VII Settimana

DERIVAZIONE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

Sia $f \in C(B_r(x_0) \times (a,b))$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Supponiamo che

i) $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ esiste ed é continua in $B_r(x_0) \times (a,b)$

ii) $\exists g$ integrabile in (a,b) : $|f(x,t)| + |f_{x_j}(x,t)| \le g(t) \quad \forall t, x.$

Allora $\quad x \to \int\limits_a^b f(x,t)\, dt \quad$ é derivabile in $x_j \quad \forall\, x \in B_r(x_0)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_a^b f(x,t)\, dt \;=\; \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\, dt$$

Prova. Fissato $x \in B_r(x_0)$, sia, per $t \in (a,b)$,

$$F(s,t) := \frac{f(x+se_j,t) - f(x,t)}{s} \quad \text{se} \quad 0 < |s| \le \delta, \qquad F(0,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)$$

Notiamo che F é continua in $(0,t)$ per come é definita, e quindi, viste le ipotesi su f, é continua in tutto $[-\delta,\delta] \times (a,b)$. Siccome, per il Teorema Fondamentale del Calcolo, $|F(s,t)| = \left| \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\tau s e_j, t) \right| \le g(t)$, dal teorema sulla dipendenza continua segue che $\quad s \to \int\limits_a^b F(s,t)dt \quad$ é continua in $0 \in [-\delta,\delta]$, cioé appunto

$$\frac{\int\limits_a^b f(x+se_j,t)dt - \int\limits_a^b f(x,t)dt}{s} = \int\limits_a^b F(s,t)dt \to_{s\to 0} \int\limits_a^b F(0,t)dt = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dt$$

1. Un esempio: calcolo dell'integrale di Dirichlet

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(integrale di Dirichlet)}$$

Sia $\quad f(x,t) = \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}$. Siccome f e $f_x = -e^{-tx}\sin t$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$, sono continue ed equidominate in $[\underline{x}, +\infty) \times (0,\infty)$ per ogni $\overline{x} > 0$, é vero che

$$\frac{d}{dx} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d}{dx}\, \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t\, dt$$

Integrando (due volte) per parti si ottiene

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,e^{-tx}\,dt \;=\; -\frac{1}{1+x^2}$$

In particolare,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,e^{-tx}\,dt :=\; c-\arctan x$$

Per determinare c, mandiamo x all'infinito e troviamo

$$c-\frac{\pi}{2}=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt \;=\; 0$$

perché $\quad |\int_0^{\delta}\frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt|\le\delta \quad$ e $\quad |\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt|\le\int_{\delta}^{+\infty}e^{-tx}dt=\frac{e^{-\delta x}}{x}\to_{x\to+\infty}0.$
Mandando x a zero, troviamo invece che

$$c=\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt$$

Ma abbiamo anche visto che

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\;dt$$

e quindi $\frac{\pi}{2}=c=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\;dt.$

2. Una applicazione: Invertibilitá nell'ordine di integrazione (Fubini)

Sia $f\in C([a,b]\times[c,d])$, e quindi $\quad x\to\int_c^d f(x,y)dy \quad$ e $\quad y\to\int_a^b f(x,y)dx$ sono continue, in $[a,b]$ e in $[c,d]$ rispettivamente, e quindi ivi integrabili. Si ha

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Prova . Dalla derivabilitá di $\quad y\to\int_c^y f(s,t)ds \quad$ e dalla continuitá della sua derivata, segue che $\quad y\to\int_a^b\left(\int_c^y f(s,t)dt\right)ds \quad$ é derivabile, e, derivando sotto segno di integrale, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^y f(s,t)dt\right)ds=\int\limits_a^b\frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_c^y f(s,t)dt\right)ds=\int\limits_a^b f(s,y)ds$$

D'altra parte, dalla continuitá di $t\to\int\limits_a^b f(s,t)ds$ segue, grazie al TFC, che

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_c^y\left(\int\limits_a^b f(s,t)ds\right)dt=\int\limits_a^b f(s,y)ds$$

Dunque, la funzione

$$F(y):=\int\limits_c^y\left(\int\limits_a^b f(s,t)ds\right)dt-\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^y f(s,t)dt\right)ds$$

ha derivata nulla in (c,d) ed é quindi é costante in $[c,d]$; in particolare,

$$F(d)=F(c)=\int\limits_c^c\left(\int\limits_a^b f(s,t)ds\right)dt-\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^c f(s,t)dt\right)ds=0$$

e quindi

$$\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(s,t)ds\right)dt-\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(s,t)dt\right)ds=F(d)=0$$

3. La funzione Γ di Eulero.

$$\Gamma(s)\ :=\ \int\limits_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt,\quad s>0$$

La funzione Γ é definita in $(0,+\infty)$ perché $\int\limits_0^1\frac{dt}{t^{1-s}}<+\infty\quad\forall s>0$ e $e^{-t}\,t^{s-1}$ va a zero, per t che va all'infinito, piú rapidamente di ogni potenza di $\frac{1}{t}$.
Inoltre, $(t,s)\to t^{s-1}e^{-t}$ é equidominata per $s\in[\underline{s},\overline{s}]$, $0<\underline{s}<1<\overline{s}$, dalla funzione

$$f(t)=t^{\underline{s}}\,e^{-t}\ \text{per}\ t\le 1,\qquad f(t)=t^{\overline{s}}\,e^{-t}\ \text{per}\ t\ge 1.$$

Quindi $\Gamma(s)$ é continua. Poi, siccome $\frac{\partial}{\partial s}t^{s-1}\,e^{-t}=t^{s-1}\log t\,e^{-t}$ é ugualmente continua ed equidominata, Γ é derivabile, con $\Gamma'(s)=\int\limits_0^\infty t^{s-1}\log t\,e^{-t}\,dt,\quad s>0.$

Γ é infatti C^∞. Ad esempio, $\Gamma''(s) = \int\limits_0^\infty t^{s-1}\,(\log t)^2\, e^{-t}\,dt > 0$.

Esempio 1. Effettuando il cambio $t = \tau^2$ e quindi integrando per parti, troviamo

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty \tau e^{-\tau^2}\tau d\tau = \int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau = \sqrt{\pi}$$

Esempio 2. Integrando per parti,

$$s\Gamma(s) = s\int\limits_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt \;=\; \int\limits_0^\infty t^s\,e^{-t}\,dt = \Gamma(s+1)$$

In particolare, siccome $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Il *comportamento asintotico di* $n!$ é descritto dalla

Formula di Stirling

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+\frac{1}{2}}\,e^{-s}\,\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \;+\; \circ(1)\right], \qquad \circ(1) \to_{s\to+\infty} 0$$

Dimostrazione della Formula di Stirling.: Posto $t = s\tau$, troviamo

$$\Gamma(s+1) := \int\limits_0^\infty t^s\,e^{-t}\,dt = s^s\int\limits_0^\infty \tau^s e^{-s\tau}sd\tau \;=\; s^{s+1}\,e^{-s}\int\limits_0^\infty e^{s-s(\tau-\log\tau\,)}\,d\tau$$

e ponendo poi $t = \tau - 1$, $h(t) = t - \log(t+1)$, troviamo

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+1}\,e^{-s}\int\limits_{-1}^\infty e^{-sh(t)}\,dt$$

Notiamo che

$$h(t) = \frac{t^2}{2}(1+\epsilon(t)) \quad \text{ove} \quad \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0, \qquad th'(t) > 0 \quad \forall t \neq 0, \qquad h''(t) > 0 \quad \forall t$$

e quindi, se $0 < \beta << 1$, risulta $h(\pm\beta) \geq \frac{\beta^2}{4}$ e quindi

$$h(t) \geq \frac{h(\beta)}{\beta}t \geq \frac{\beta}{4}t \quad \forall t \geq \beta, \qquad h(t) \geq \frac{h(-\beta)}{-\beta}t \geq -\frac{\beta}{4}t \quad \forall t \in [-1, -\beta]$$

Per determinare il comportamento asintotico di $\int\limits_{-1}^\infty e^{-sh(t)}\,dt$ osserviamo che

$$\int\limits_{-1}^{-\beta} e^{-sh(t)}\,dt \le \int\limits_{-1}^{-\beta} e^{s\frac{\beta}{4}t}\,dt \le \tfrac{4}{\beta s}e^{-s\frac{\beta^2}{4}} \quad \text{e} \quad \int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-sh(t)}\,dt \le \int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-s\frac{\beta}{4}t}\,dt = \tfrac{4}{s\beta}e^{-s\frac{\beta^2}{4}}$$

decadono esponenzialmente a zero (per s che va a $+\infty$) mentre, effettuando il cambio di variabile $t\sqrt{s} = x$, troviamo

$$\int\limits_{-\beta}^{\beta} e^{-sh(t)}\,dt = \frac{1}{\sqrt{s}}\int\limits_{-\sqrt{s}\beta}^{\sqrt{s}\beta} e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})}\,dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \circ(1)\right]$$

con $\circ(1) \to_{s\to+\infty} 0$ perché

$$\int\limits_{-\sqrt{s}\beta}^{\sqrt{s}\beta} e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})]}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]}\chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \circ(1)$$

giacché la famiglia di funzioni $x \to e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]}\chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]}$, $x \in \mathbf{R}$ converge (uniformemente sui compatti al tendere di s all'infinito) alla funzione $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ed é equidominata:

$$e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]}\chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]} \le e^{-\frac{x^2}{4}}$$

.

2. **Integrale di Gauss, funzione Γ e area della sfera unitaria in $\mathbf{R}^n$.**

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi} \qquad \textbf{(integrale di Gauss)}$$

Usando Fubini (iterato) troviamo

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\dots\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x_1^2+\dots+x_n^2)}dx_1\right)dx_2\right)\dots dx_n = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x_1^2}dx_1\right)\dots\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x_n^2}dx_n\right) = 1$$

Indichiamo con ω_n l'area di $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$. Con un calcolo in coordinate polari, si trova

$$\omega_n = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\dots\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x_1^2+\dots+x_n^2)}dx_1\right)dx_2\right)\dots dx_n}{\int_0^\infty e^{-\pi r^2}r^{n-1}dr} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\int\limits_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}dt} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

Indicheremo con supp(f), $\quad f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la chiusura dell'insieme $\{x : f(x)\neq 0\}$. Indicheremo con $C_0(\mathbf{R}) := \{f\in C(\mathbf{R}) : \quad \text{supp}(f) \text{ é compatto}\}$ lo spazio (vettoriale) delle funzioni continue a supporto compatto.

In $C_0(\mathbf{R})$ sono definite le norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|, \quad \|f\|_1 := \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx.$

Per ogni $f,g\in C_0(\mathbf{R})$ é definita in $\mathbf{R}$ la funzione

$$(f*g)(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

Tale operazione tra funzioni si chiama *prodotto di convoluzione* e la funzione $f*g$ é detta, semplicemente, *convoluzione* tra f e g.

Proposizione

(i) $\quad f*g\in C_0(\mathbf{R}) \quad \forall f,g\in C_0(\mathbf{R})$

(ii) $\quad$ L'applicazione $\quad (f,g)\to f*g \quad$ é bilineare e simmetrica.

(iii) $\quad$ Se $g\in C_0(\mathbf{R})\cap C^k$ allora $f*g\in C^k(\mathbf{R}) \quad \forall f\in C_0(\mathbf{R})$.

(iv) $\quad \|f*g\|_\infty \le \|g\|_1\,\|f\|_\infty \quad \forall f,g\in C_0(\mathbf{R})$

(v) $\quad \|f*g\|_1 \le \|g\|_1\,\|f\|_1 \quad \forall f,g\in C_0(\mathbf{R}) \quad$ (**Diseguaglianza di Young**)

Prova

(i) Che $f*g$ sia continua deriva dal fatto che $(x,y)\to f(x-y)g(y)$ é continua ed equidominata: $\quad |f(x-y)g(y)|\le \|f\|_\infty|g(y)| \quad \forall x,y\in\mathbf{R}$.
Poi, se $\quad |x|\ge R \Rightarrow f(x)=g(x)=0 \quad$ allora

$$|x|\ge 2R,\ |y|\le R \quad \Rightarrow |x-y|\ge R \quad \Rightarrow \quad f(x-y)=0 \quad \Rightarrow$$

$$(f*g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy \;=\; \int\limits_{-R}^{R} f(x-y)g(y)\,dy \;=0$$

In effetti, supp$(f*g)\subset$ supp (f) + supp (g), ove, se $A,B\subset\mathbf{R}$, allora $A+B := \{a+b : \quad a\in A, b\in B\}$.

(ii) La bilinearitá é evidente. La simmetria segue dal cambio di variabile $t = x-y$:

$$(f*g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt \;=\; (g*f)(x)$$

(iii) Come per la continuitá, é una conseguenza del Teorema di derivazione sotto segno di integrale: $\quad g \in C_0 \cap C^1 \quad \Rightarrow \quad |f(y)g'(x-y)| \le \|g'\|_\infty \quad \forall x, y \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}(f*g)(x) \;=\; \frac{d}{dx}(g*f)(x) \;=\; \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{dg}{dx}\,(x-t)dy$$

Piú in generale

$$g \in C_0^k \quad \Rightarrow \quad f*g \in C^k \quad \text{e} \quad \frac{d^j}{dx^j}(f*g)(x) \;=\; (f*\frac{d^j g}{dx^j})(x) \qquad \forall j \le k$$

(iv) $\quad |(f*g)(x)| :\le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy \;\le \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\,dy$

(v) $\quad$ Per Fubini e l'invarianza dell'integrale per traslazione,

$$\|f*g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f*g|(x)dx \le \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(|g(y)|\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\,dx\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(|g(y)|\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt\right)dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\,dy\right) \;=\; \|f\|_1\,\|g\|_1$$

NOTA. $f*g$ é definita anche se solo f (o g) é a supporto compatto. In tal caso peró $f*g$ non sará piú a supporto compatto, mentre (ii) continua a valere e la (iii) vale per ogni $g \in C^k$.

Esercizio. Provare che se $f \in C_0$ e p é un polinomio di grado n, allora $f*p$ é un polinomio di grado n.

Scriviamo $p(x-y) = \sum_{k=0}^n a_k(x-y)^k = \sum_{k=0}^n b_k(y)x^k$ e quindi

$$(f*p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(x-y)dy = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)b_k(y)dy\right)x^k$$