AM2 2010-2011: Tracce delle lezioni- VI Settimana

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

$u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per $f \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \; f(u) \leq f(v) \;\; \forall v \in D_\delta(u)$

Condizioni necessarie. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora

(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0$ (u é **critico** o **stazionario** per f)

(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\, h > \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Prova. (i) $h \in \mathbf{R}^n, \quad |t| \leq \delta_h \quad \Rightarrow \quad f(u) \leq f(u+th) \quad \Rightarrow$

$$0 = \tfrac{d}{dt} f(u+th)_{|t=0} = < \nabla f(u), h > \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0.$$

(ii) Dalla formula di Taylor: $\quad \nabla f(u) = 0, \quad 0 \leq f(u+h) - f(u) =$

$$\nabla f(u) + ||h||^2 \, [< H_f(u) \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > + \circ(1)] \quad \Rightarrow \quad < H_f(u) \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > \geq 0$$

Una condizioni sufficente. Sia $f \in C^2(D_r(u))$, e $\nabla f(u) = 0$:

$$< H_f(u)\, h, h > > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, \; h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad u \quad \text{é minimo locale}$$

Prova. $h \to < H_f(u) h, h >$ continua, $< H_f(u) h, h > > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, h \neq 0, \Rightarrow$

$$\exists \, m := \min_{\|h\|=1} < H_f(u)\, h, h > > 0$$

Quindi, $< H_f(u)\, h, h > \geq m \, \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$. Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $0 < \|h\| << 1 \Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) = \|h\|^2 \, [< H_f(u) \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} > + \circ(1)] \geq \|h\|^2 \, [m + \circ(1)] > 0$$

Massimi locali liberi Se invece $\exists \delta > 0 : \; f(u) \geq f(v) \;\; \forall v \in D_\delta(u)$, u si dice massimo locale libero per f. Anche in tal caso, se $f \in C^1(D_r(u))$, necessariamente $\nabla f(u) = 0$, mentre, se $f \in C^2(D_r(u))$, allora $\quad < H_f(u)\, h,\, h > \leq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.

Analogamente, la condizione sufficente perché u sia massimo locale libero per $f \in C^2(D_r(u))$ é che

$$\nabla f(u) = 0 \quad \text{e} \quad < H_f(u)\, h, h > < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, \; h \neq 0$$

Forme quadratiche

La natura di un punto stazionario $u = (x_1, \dots, x_n)$ di f dipende dalle proprietá di segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana

$$< H_f(u)\, h,\ h > \ = \ \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)\, h_i\, h_j \ = \qquad h = (h_1, \dots, h_n)$$

Ora, $H_f(u)$ simmetrica $\Rightarrow$ $H_f(u)$ ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Le proprietá di segno della forma quadratica associata sono legate al segno degli autovalori. Diamo qui una dimostrazione analitica di questo fatto.

Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,\dots,n}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice $n \times n$ simmetrica. La forma quadratica associata

$$< \mathcal{A}\ h,\ h >:= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$$

si dice

definita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > > 0\,(< 0),\ \forall\, h \neq (0,0)$
semidefinita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > \geq 0\,(\leq 0),\ \forall\, h \in \mathbf{R}^n$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora
$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h >$ $\qquad \lambda_n = \sup_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h >$

Prova. Sia $\overline{h}$ di norma 1 tale che $m := < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >= \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}h, h >$.
Sia $f(h) = \frac{<\mathcal{A}h,h>}{\|h\|^2} =< \mathcal{A}\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} >,\ h \neq 0$ e quindi $f(\overline{h}) = \min_{h \neq 0} f(h)$ e quindi

$$0 = \frac{d}{dt} f(\overline{h}+th)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > +t(< \mathcal{A}h, \overline{h} > + < \mathcal{A}\overline{h}, h >) + t^2 < \mathcal{A}h, h >}{1 + 2t < \overline{h}, h > +t^2\|h\|^2}\right]_{|t=0} =$$

$$< \mathcal{A}h, \overline{h} > + < \mathcal{A}\overline{h}, h > -2 < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >< \overline{h}, h >= 2[< \mathcal{A}\overline{h}, h > - < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >< \overline{h}, h >]$$

$\forall h \in \mathbf{R}^n$perché $\mathcal{A} = \mathcal{A}^t$. Dunque

$$\mathcal{A}\overline{h} =< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > \ \overline{h} = m\overline{h}$$

cioé m é un autovalore di $\mathcal{A}$, ed é necessariamente il piú piccolo, giacché

$$\mathcal{A}h = \lambda h,\ ||h|| = 1 \ \Rightarrow\ \lambda \ =< \mathcal{A}h, h > \geq\ m$$

Corollario

(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\ \Leftrightarrow\ \lambda_1 > 0\ \ (\lambda_n < 0)$

(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\ \Leftrightarrow\ \lambda_1 = 0\ \ (\lambda_n = 0)$

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Sia Λ un insieme, I un intervallo e $f : \Lambda \times I \to \mathbf{R}$ una famiglia di funzioni reali di variabile reale dipendente da un 'parametro' $\lambda \in \Lambda$. Ad esempio, se $\Lambda = \mathbf{N}$, si tratta di una successione di funzioni in I; se $f(\lambda, x) = x^2 - 2\lambda x + \log\lambda$, si tratta di una famiglia di polinomi, dipendenti dal parametro (reale positivo) λ (qui, $I = \mathbf{R}$). Se, per ogni fissato λ, la funzione $x \to f(\lambda, x)$ é continua in $I = [a, b]$ e quindi integrabile in $[a, b]$, resta definita la funzione nella variabile λ, data da

$$\lambda \to \int_a^b f(\lambda, t)dt$$

Parleremo anche di *integrale dipendente da parametro* (il parametro λ).
Naturalmente si potrá considerare anche il caso in cui I sia un intervallo aperto e/o illimitato, ed in tal caso richiederemo alla funzione $x \to f(\lambda, x)$ di essere integrabile in senso improprio (o generalizzato) in I. Ad esempio, la funzione

$$\lambda \to \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}dt$$

é definita per ogni valore del parametro λ in $[0, +\infty)$. Qui $I = [0, +\infty)$.
Se $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$, potremo chiederci quale 'regolaritá' (continuitá, derivabilitá..) abbia tale funzione, ovvero con quale regolaritá l'integrale dipenda dal parametro λ.

DIPENDENZA CONTINUA

Sia $f \in C(K \times (a, b)), K \subset \overline{B_r(x_0)}$ un compatto in $\mathbf{R}^n$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Se f é **equidominata** in (a, b) (dominata *uniformemente al variare di* x in K), cioé

$$\exists \;\; g \in C((a, b)) : \quad |f(x, t)| \le g(t) \quad \forall x \in K, \quad t \in (a, b) \quad \text{e} \quad \int_a^b g(t)dt < +\infty$$

allora $\quad x \to \int_a^b f(x, t)\, dt \;$ é continua in K, ovvero

$$x_j \in K, \quad x_j \to_j x \in K \quad \Rightarrow \quad \lim_j \int_a^b f(x_j, t)\, dt = \int_a^b \lim_j f(x_j, t)\, dt$$

Prova. Notiamo innanzi tutto che $\int_a^b |f(x, t)|\, dt \le \int_a^b g(t)\, dt < +\infty \quad \forall x \in K$, cioé, per ogni $x \in K$, la funzione $\quad t \to f(x, t) \quad$ é (assolutamente) integrabile (in

senso generalizzato) in (a,b). Fissiamo ora $\epsilon > 0$.
Da $\int_a^b g(t)\,dt < +\infty$ segue che esistono $a < a_\epsilon < b_\epsilon < b$ e $\delta_\epsilon > 0$ tali che

$$\int_a^{a_\epsilon} g(t)dt + \int_{b_\epsilon}^b g(t)dt \le \frac{\epsilon}{4}$$

mentre, dalla continuitá di f sul compatto $K \times [a_\epsilon, b_\epsilon]$ segue (teorema di Heine-Cantor) che

$$\sup_{t\in[a_\epsilon,b_\epsilon]} |f(x_j,t) - f(x,t)| \le \tfrac{\epsilon}{2(b_\epsilon - a_\epsilon)} \qquad \text{per tutti i } j \text{ grandi.}$$

Quindi

$$\left|\int_a^b f(x_j,t) - f(x,t)\,dt\right| \le 2\int_a^{a_\epsilon} g(t)dt + 2\int_{b_\epsilon}^b g(t)dt + \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} |f(x_j,t) - f(x,t)|\,dt \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

NOTA 1. É un *teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale* in ipotesi di *convergenza uniforme + equidominatezza*. La continuitá di f assicura che

$$\sup_{t\in K} |f(x_j,t) - f(x,t)| \to_j 0 \qquad \text{per ogni } K \subset I \text{ compatto}$$

ovvero $\varphi_j(t) := f(x_j,t) \to_j \varphi(t) := f(x,t)$ *uniformemente (in t) sui compatti.*
In modo analogo, se, per ogni $t \in I$, esiste $f(t) := \lim_{\|x\|\to\infty} f(x,t)$ e tale limite *é uniforme* sui compatti di I (e quindi $f \in C(I)$), cioé

$$\sup_{t\in K} |f(x,t) - f(t)| \to_{\|x\|\to\infty} 0 \qquad \text{per ogni } K \subset I \text{ compatto}$$

ed $f(x,t)$ é equidominata, allora $\int_a^b f(x,t)dt \to_{\|x\|\to\infty} \int_a^b f(t)dt$.
Il teorema di dipendenza continua é dunque un teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale in ipotesi di 'uniforme convergenza sui compatti' piú una proprietá di equidominatezza.

NOTA 2. L'equidominatezza é essenziale. Sia ad esempio

$$f(x,t) = \frac{\sin(x^2 t)}{t}, \quad t \in \mathbf{R}, t \ne 0, \quad x \in \mathbf{R}, \qquad f(x,0) = x^2$$

f é continua in $(x,t):\ \ t \neq 0$ ed anche in $(x,0)$ perché

$$x_n \to x, t_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(x_n^2 t_n)}{t_n} = x_n^2 \frac{\sin(x_n^2 t_n)}{x_n^2 t_n} \to x^2$$

Ma, effettuando, a x fissato, diverso da zero, il cambio di variabile $\tau = x^2 t$, troviamo

$$I(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x^2 t)}{t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x^2 t)}{x^2 t} x^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \qquad \forall x \neq 0$$

mentre $I(0) = 0$ e quindi I non é continua in $x = 0$ (infatti, come vedremo, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \pi$). Nota che, se $x \neq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\sin(x^2 t)}{t}| dt = +\infty$.

Applicazione: una prova del Lemma di Schwartz.

Osservazione e un controesempio. Supponiamo $n = 2$. Per definizione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{esistono se e solo se esistono i limiti}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)] = \lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to 0} \frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)}{hk}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)] = \lim_{k\to 0}\left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y)}{hk}\right]$$

Inoltre, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ se e solo se

$$\lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to 0} \frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)}{hk}\right] = \lim_{k\to 0}\left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+k,y)+f(x,y)}{hk}\right]$$

Ció suggerisce che, in generale, risulti $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, ma che possa anche accadere che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ esistano entrambe ma siano diverse perché, come sappiamo, due successivi passaggi al limite non si possono in generale scambiare. Ad esempio,

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \qquad f(0, 0) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}] = \lim_{x\to 0} 1 = 1, \qquad \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}] = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

Notiamo che tale f non ha limite per (x, y) tendente a zero. Questo esempio suggerisce anche un esempio in cui l'invertibilitá nell'ordine di derivazione non vale. Sia

$$g(x, y) := xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{e, quindi,} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^5 - y^4 x - 4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Si vede subito che g, g_x, g_y hanno limite zero in $(0, 0)$, e quindi g ha un prolungamento C^1 su tutto $\mathbf{R}^2$. Poi, in $(0, 0)$, troviamo $g_{xx} = g_{yy} = 0$ e

$$[\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial g}{\partial x}](0,0) = \lim_{y\to 0}\tfrac{1}{y}\tfrac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -1 \quad \text{mentre} \quad [\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial g}{\partial y}](0,0) = \lim_{x\to 0}\tfrac{1}{x}\tfrac{\partial g}{\partial y}(x,0) = 1$$

Coerentemente, g non é di classe C^2. Infatti,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

non é continua in $(0,0)$, perché

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,0) \;=\; -1 \quad \forall x\neq 0, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(0,y) \;=\; 1 \quad \forall y\neq 0$$

Come abbiamo osservato,

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

se e solo se

$$\lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to 0}\frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)}{hk}\right] =$$

$$= \lim_{k\to 0}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y)}{hk}\right]$$

E ció sicuramente accade se esiste

$$\lim_{k^2+h^2\to 0}\left[\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y)}{hk}\right]$$

Proviamo che, se f_{xy} e f_{yx} esistono e sono continue, allora tale limite esiste. Dal Teorema fondamentale del calcolo segue che

$$\left[\tfrac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y)}{hk}\right] = \tfrac{1}{hk}\int_0^1 \tfrac{d}{dt}\left[f(x+h,y+tk)-f(x,y+tk)\right]dt =$$

$$= \tfrac{1}{h}\int_0^1 \left[f_y(x+h,y+tk)-f_y(x,y+tk)\right]dt = \tfrac{1}{h}\int_0^1\left[\int_0^1 \tfrac{d}{ds}f_y(x+sh,y+tk)ds\right]dt =$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^1 f_{yx}(x+sh,y+tk)ds\right]dt$$

La validitá di questa formula risiede nella continuitá dell'integrale dipendente da parametro $t\to\int_0^1 f_{yx}(x+sh,y+tk)ds$. Infine, dalla continuitá di f_{yx} segue che

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f_{yx}(x+sh,y+tk)ds\right]dt \to_{k^2+h^2\to 0} \int_0^1\left[\int_0^1 f_{yx}(x,y)ds\right]dt = f_{yx}(x,y)$$

ESEMPIO 1 *(integrale di Dirichlet).*

$$f(x,t) = \frac{\sin t}{t} e^{-tx}, \quad t > 0, \quad x \geq 0$$

é equidominata in $(0,+\infty)$ al variare di x in $[\underline{x},+\infty)$, quale che sia $\underline{x} > 0$:

$$|f(x,t)| \leq g(t) := e^{-t\underline{x}} \quad \forall t > 0, \quad x \geq \underline{x} > 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t\underline{x}} dt = \frac{1}{\underline{x}} < +\infty$$

e quindi $\quad h(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \quad$ é continua in ogni $x > 0$.

Notiamo che h é definita anche in $x = 0$. Il Teorema sulla dipendenza continua non si applica tuttavia in questo caso, e non si puó quindi affermare la continuitá di h in $\quad x = 0$, ovvero, tale Teorema non assicura che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \to_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \qquad (?)$$

perché *manca l'equidominatezza fino a zero.* Infatti

$$\exists g \geq 0 \quad \text{tale che} \quad \int_0^{\infty} g < \infty \quad \text{e} \quad |\tfrac{\sin t}{t} e^{-tx}| \leq g(t) \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} \left|\tfrac{\sin t}{t}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} g dt < \infty, \quad \text{mentre si sa che} \quad \int_0^{+\infty} \left|\tfrac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty.$$

Proviamo con un argomento ad hoc la continuitá in $x = 0$.

Scriviamo $G(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau, \quad G(\infty) = \int_0^{\infty} \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$ e quindi $|G(t) - G(\infty| \leq \epsilon$ se $t \geq t_\epsilon$.

Notiamo anche che G é limitata: $\exists M$ tale che $\quad |G(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$. Integrando per parti ed effettuando quindi il cambio di variabile $s := tx$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = x \int_0^{+\infty} G(t) e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} G(\frac{s}{x}) e^{-s} ds \to_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

perché

$$\int_0^{+\infty} G(\frac{s}{x}) e^{-s} ds - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} [G(\frac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds$$

e

$$|\int_0^{\delta} [G(\frac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds| \leq 2M[1 - e^{-\delta}] \qquad \int_{\delta}^{\infty} |G(\frac{s}{x}) - G(\infty)| e^{-s} ds \leq \epsilon \text{ se } \frac{\delta}{x} \geq t_\epsilon$$

Esercizi e complementi

1. Sia $$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)\ .$$

É

$$f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \qquad\qquad f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$$

$$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$$

Punti stazionari: $(0,0)$, $(\pm 1, 0))$; $\det H(\pm 1, 0) > 0$, $\det H(0,0) < 0$; $(\pm 1, 0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$; $(0,0)$ é una sella.

2. Sia $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Notiamo che
$$\nabla g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y, \quad y^2 = x$$
e quindi $(0,0), (1,1)$ sono gli unici punti critici di g. Poi

$$g_{xx} = 6x, g_{yy} = 6y, g_{xy} = -3$$

e quindi

- $H_g(0,0)$ ha autovalori ± 3 e quindi $(0,0)$ é di sella

- $H_g(1,1)$ ha autovalori positivi e quindi $(1,1)$ é di minimo locale (e non assoluto, perché $\inf\limits_{\mathbf{R}^2} = -\infty$).

3. L'equidominatezza é essenziale nel Teorema di dipendenza continua Sia, ad esempio,
$$f(x,t) = \frac{t}{1+|t|^{2+x^2}}, \qquad t, x \in \mathbf{R}$$
Tale f é continua in $\mathbf{R}^2$, ma non é equidominata (in $\mathbf{R}$) rispetto a $x \in [-\delta, \delta]$ perché $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{1+|t|^2} dt = +\infty$ (teorema del confronto). In particolare, non esiste $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+|t|^2} dt$.
Tuttavia, per $x \neq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{1+|t|^{2+x^2}} dt < \infty$, e quindi la funzione $g(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+|t|^{2+x^2}} dt$ é definita per $x \neq 0$ e, per disparitá, vale zero. Dunque $g(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) dt, \quad x \neq 0$ ha un prolungamento continuo in $x = 0$, che non é $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(0,t) dt$ (che neppure esiste!).

Notiamo che la continuitá di f assicura che

$$f(x,t) \to_{x\to 0} f(0,t) = \tfrac{t}{t^2+1} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \text{uniformemente sui compatti}$$

E in effetti la convergenza é uniforme su tutto $\mathbf{R}$ perché $|f(x,t)| \leq |f(0,t)|$ e $f(0,t) \to_{t\to\infty} 0$. Il carattere uniforme della convergenza si vede anche direttamente stimando $\quad \max_t |f(x,t) - f(0,t)| \leq \max_t \frac{|t(1-|t|^{x^2})|}{1+|t|^{x^2+2}}$:

$$\max_{t\geq 1} \frac{t(t^{x^2}-1)}{|t|^{x^2+2}} = \max_{t\in[0,1]} t(1-t^{x^2}) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}} \frac{x^2}{1+x^2} \to_{x\to 0} 0$$

Notiamo infine che $h(x) := \int\limits_0^{+\infty} f(x,t)dt$ é, come g, definita per $x \neq 0$, ma, diversamente da g, ha un limite per x tendente a zero, e infatti

$$\lim_{x\to 0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t}{1+|t|^{2+x^2}} dt = +\infty = \int\limits_0^{+\infty} \lim_{x\to 0} \frac{t}{1+|t|^{2+x^2}} dt$$

4. Provare che se $f \in Lip_{loc}(\Omega)$ allora f é Lipschitziana sui sottoinsiemi K compatti di Ω.

Supponiamo il contrario:
esiste K ed esistono $x_j, y_j \in K$ tali che $\quad \frac{\|f(x_j)-f(y_j)\|}{\|x_j-y_j\|} \to_j \infty$.
Siccome f é limitata in K, dovrá risultare $\|x_j - y_j\| \to_j 0$. Passando a sottosuccessioni, possiamo supporre che

$$\exists \bar{x} \in K : \quad x_j \to_j \bar{x}, \quad y_j \to_j \bar{x}, \quad \frac{\|f(x_j)-f(y_j)\|}{\|x_j-y_j\|} \to_j \infty$$

contraddicendo la Lipschitzianitá in $B_r(\bar{x})$ per qualche $r > 0$.