AM210-2011-12: Tracce delle lezioni- IV Settimana

Uniforme continuitá.

Siano $(X,d),(Y,\rho)$ spazi metrici, $A\subset X$.

$f:A\to Y$ é **uniformemente continua** in $A\subset X$ se e solo se

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta_\epsilon>0:\quad (u,v\in K,\ \ d(u,v)\le\delta_\epsilon\quad\Rightarrow\quad \rho(f(u),f(v))\le\epsilon)$$

Lipschitzianitá. f si dice Lipschitziana (o Lip) di costante $L>0$ se

$$d(f(x),f(y))\le Ld(x,y)$$

Una funzione si dice localmente Lipscitziana in A se, per ogni $x\in A$, é Lip su qualche $B_{r(x)}(x)\cap A$. O, equivalentemente (vedi Es. 7), se é Lip sui compatti.

Chiaramente, ogni funzione Lip é anche uniformemente continua, ma non viceversa. Ad esempio, $f(x)=\sqrt{|x|},\quad x\in R$ é uniformemente continua (in $\{|x|\le 1\}$ per Heine-Cantor, ed in $\{|x|\ge 1\}$, perché $x,y\ge 1\Rightarrow|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\frac{1}{2}|x-y|$) ma non é Lip, perché $\sup\limits_{x\ne 0}\frac{\sqrt{|x|}}{|x|}=+\infty$.

(**Teorema di Heine-Cantor**)

$$f\in C(K,Y),\ \ K\subset X\qquad\text{compatto}\qquad\Rightarrow\qquad f \text{ é uniformemente continua in } K.$$

Prova 1 $(X=R^n)$. Se no, $\exists\ \epsilon_0>0$, $u_n,v_n\in K$, $d(u_n,v_n)\le\frac{1}{n}$ tale che $\rho(f(u_n),f(v_n))\ge\epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n\to u$, $v_n\to v$ per certi $u,v\in K$. Per continuitá: $\rho(f(u),f(v))\ge\epsilon_0$. Ma $d(u,v)\le d(u,u_n)+d(u_n,v_n)+d(v_n,v)\quad\forall n\ \Rightarrow\ u=v$, contraddizione.

Prova 2 $(X=R^n)$. Fissato $\epsilon>0$, sia, per ogni x in K,

$$\delta_\epsilon(x):=\sup\{\delta>0:\quad x',x''\in B_\delta(x)\Rightarrow\rho(f(x'),f(x''))<\epsilon\}$$

La funzione $x\to\delta_\epsilon(x)$ é inferiormente semicontinua, perché, se $x_j\to x$,

$$B_{\delta_\epsilon(x)-d(x,x_j)}(x_j)\subset B_{\delta_\epsilon}(x)\Rightarrow\delta_\epsilon(x_j)\ge\delta_\epsilon(x)-d(x,x_j)\Rightarrow\liminf_j\delta_\epsilon(x_j)\ge\delta_\epsilon(x)$$

Per Weierstrass, esiste $\underline{x}\in K$ tale che $\delta_\epsilon(x)\ge\delta_\epsilon(\underline{x})\quad\forall x\in K$. Dunque

$$d(x,y)<\delta_\epsilon(\underline{x})\Rightarrow\rho(f(x),f(y))\le\epsilon$$

Prova 3. Fissato $\epsilon > 0$

$$\forall\, x \in K\ \exists \delta_\epsilon(x) \qquad x'\,,\, x'' \in B_{\delta_\epsilon(x)}(x) \quad \Rightarrow \rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$$

Dalla compattezza di K segue che

$$\exists x_j \in K,\ j = 1, \ldots, p: \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}}(x_j)$$

Sia $\delta_\epsilon :=\ \min_j\ \delta_\epsilon(x_j)$. Allora,

$$d(x,y) < \frac{\delta_\epsilon}{2},\ x \in B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}} \Rightarrow d(y, x_j) < \frac{\delta_\epsilon}{2} + \frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2} < \delta_\epsilon(x_j) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$$

CONNESSIONE

Definizione di insieme connesso per archi

$A \subset \mathbf{R}^n$ é **connesso per archi** se

$$\forall\, u, v \in A,\ \ \exists\, \gamma \in C([a,b], A): \quad \gamma(a) = u,\ \gamma(b) = v$$

ovvero, presi due punti u, v di A esiste un cammino continuo che porta da u a v senza uscire da A.

ESEMPIO $\quad A \subset \mathbf{R}$ é connesso per archi $\quad \Leftrightarrow \quad A$ é un intervallo.

Siccome due punti di un intervallo I sono estremi di un intervallo chiuso (che é ovviamente un arco) tutto contenuto in I, ogni intervallo é connesso per archi. Viceversa, se A é connesso per archi, dati $x < y$ punti di A, esiste $\gamma \in C([0,1], A)$ e tale che $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Per il teorema del valore intermedio $\gamma([0,1])$ contiene tutto l'intervallo di estremi x ed y e quindi A é un intervallo.

Proposizione Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ continua. Se A é connesso per archi allora $f(A)$ é connesso per archi.

Infatti, se $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, $f \circ \gamma$ é cammino continuo, in $f(A)$, tra $f(x)$ ed $f(y)$.

Teorema del valore intermedio.

Sia $A \subset \mathbf{R}^n$, connesso, $\quad f \in C(A, \mathbf{R})$. Allora,

$$x, y \in A, a := f(x), b := f(y), a < c < b \ \Rightarrow \exists z \in A: \quad f(z) = c$$

Infatti: $f(A)$ é sottoinsieme connesso per archi in $\mathbf{R}$, e quindi é un intervallo.

Definizione di insieme connesso

Uno spazio metrico (X, d) é connesso se non é unione di due aperti disgiunti, ovvero l'unico sottoinsieme non vuoto di X che é sia aperto che chiuso é X.
$A \subset \mathbf{R}^n$ é **connesso** se $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$, O_1, O_2 aperti e tali che $A \cap O_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

Dunque, é sconnesso un insieme che si puó separare in due parti (non vuote) mediante due aperti (di A) disgiunti, se cioé esistono O_1, O_2 aperti tali che $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ e $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ e $A \cap O_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$. Ad esempio, $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = ax + b\}$ é unione di due aperti disgiunti e quindi sconnesso. Allo stesso modo, una circonferenza disconnette il piano.

NOTA. La proprietá di connessione si usa cosi:
se A é connesso, e l'insieme delle x in A per le quali una affermazione $P(x), x \in A$ é vera é sia aperto che chiuso, allora $P(x)$ é sempre vera oppure é sempre falsa.

Per esempio, se $f \in C(A, \mathbf{R})$ é localmente costante in A (cioé per ogni $x \in A$ esiste $B_r(x)$ tale che f é costante in $B_r(x) \cap A$) ed A é connesso, allora f é costante in A.

Lemma. A connesso per archi $\Rightarrow$ A connesso.

Siano $O_i, i = 1, 2$ aperti tali che $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ con $A \cap O_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$. Sia γ cammino continuo in A, con $\gamma(0) \in O_1, \gamma(1) \in O_2$. Siccome, per continuitá, $\gamma(t) \in O_1$ se t é vicino a $t = 0$, l'intervallo $I := \{t \in [0, 1] : \gamma(\tau) \in O_1 \, \forall \tau \in [0, t)\}$ é un intervallo non vuoto e $\bar{t} := \sup I < 1$. Siccome, sempre per continuitá, $\gamma(\bar{t}) \notin O_1$, si ha che $\gamma(\bar{t}) \in O_2$ e quindi, per continuitá, $\gamma(t) \in O_2$ per $t < \bar{t}$ vicino a $\bar{t}$. Dunque $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ e cioé A é connesso.

NOTA. Il viceversa é vero se A é aperto, ma non é vero in generale.

L'immagine continua di un insieme connesso é un insieme connesso

Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ continua. Se A é connesso allora $f(A)$ 'e connesso.

Infatti, $f(A) = (f(A) \cap O_1) \cup (f(A) \cap O_2) \Rightarrow A = (f^{-1}(O_1) \cap A) \cup (f^{-1}(O_2) \cap A) \Rightarrow f^{-1}(O_1) \cap A \cap f^{-1}(O_2) \neq \emptyset \Rightarrow O_1 \cap A \cap O_2 \neq \emptyset$.

DIFFERENZIABILITÁ E MATRICE JACOBIANA

Siano O aperto in $\mathbf{R}^n$, $f : O \to \mathbf{R}^m$. Si dice che f é **differenziabile** in $x_0 \in O$ se esiste $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ (cioé L é trasformazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$) tale che

$$f(x_0 + h) \ = \ f(x_0) + Lh + \circ(\|h\|) \qquad (*)$$

Tale L, *se esiste é unica*. Infatti: $\quad (L_1 - L_2)(h) = \circ(\|h\|) \quad \Rightarrow t(L_1 - L_2)(h) = (L_1 - L_2)(th) = \circ(|t|) \quad \Rightarrow \quad (L_1 - L_2)(h) = \circ(1) \quad \Rightarrow \quad (L_1 - L_2)(h) = 0 \quad \forall h.$
Notiamo inoltre che, essendo L continua, f **é continua in** x_0.

La trasformazione L in $(*)$ si chiama **differenziale** di f in x_0 e si indica $df(x_0)$.

La sua matrice rappresentativa $\quad (< Le_j, \hat{e}_i >)_{i,j} \quad$ (nelle basi canoniche $e_j, \quad \hat{e}_i$, $j = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m$) si chiama **matrice Jacobiana** e si indica $J_f(x_0)$.

n=1: Cammini differenziabili. Sia $\quad \gamma : (a, b) \to \mathbf{R}^m, \quad \gamma_i :=< \gamma, \hat{e}_i >$, cioé $\gamma = \sum_{i=1}^m \gamma_i \hat{e}_i$. Il 'cammino' (o 'traiettoria') γ risulta differenziabile in $t \in (a, b)$ se esiste un vettore $v = \sum_{i=1}^m v_i \hat{e}_i$ tale che $\quad \gamma(t + \tau) = \gamma(t) + \tau v + \circ(\tau), \quad$ ovvero

$$\forall i = 1, \ldots, m \qquad \exists \quad \dot{\gamma}_i(t) := \lim_{\tau \to 0} \frac{\gamma_i(t + \tau) - \gamma_i(t)}{\tau} = v_i$$

Il vettore $\dot{\gamma}(t) := v$ é il **vettore tangente** (e, se $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$, $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$, é il **versore tangente**) al cammino γ in $\gamma(t)$; $\|\dot{\gamma}(t)\|$ é la velocitá con cui il punto che 'percorre' il cammino γ passa per $\gamma(t)$. I cammini (o 'traiettorie') dotati di vettore tangente si chiamano differenziabili.

UN ESEMPIO $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$ (equazione parametrica della circonferenza unitaria) é cammino differenziabile con $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$. Notiamo che $< \gamma(t), \dot{\gamma}(t) > \equiv 0$ e quindi, come si vede subito, $\dot{\gamma}(t)$, applicato in $\gamma(t)$, é il *versore*) alla circonferenza nel punto $\gamma(t)$.

m=1: Derivate direzionali, derivate parziali. Sia $f : O \to \mathbf{R}$ differenziabile

in $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Dati $h \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}$, sia $\varphi(t) := f(x + th)$. Da

$$\tfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \tfrac{f(x+th) - f(x)}{t} = df(x)(h) + \circ(1) \text{ se } |t| \leq \delta_h \qquad \text{segue che esiste}$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) := \frac{d}{dt} f(x + th)_{|t=0} = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = df(x)h$$

Tale quantitá si chiama **derivata di f in x nella direzione** h. In particolare,

$$(h = e_j), \qquad \exists \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = df(x)e_j$$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ (che si scrive anche $f_{x_j}, \partial_j f, D_j f, \ldots$) si chiama **derivata parziale** di f fatta rispetto alla j-esima variabile. Il vettore

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

si chiama **gradiente** di f in x, ed é il vettore che rappresenta $df(x)$:

$$df(x)h = < \nabla f(x) , h >= \frac{\partial f}{\partial h}(x)$$

Se $\mathbf{m} > \mathbf{1}$, f differenziabile in x_0 $\Leftrightarrow$ $\frac{\| f(x_0+h) - [f(x_0)+df(x_0)h] \|}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{f_i(x_0+h) - [f_i(x_0)+<df(x_0)h, \hat{e}_i>]}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0$ $\forall i$ $\Leftrightarrow$ f_i sono differenziabili con

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = df_i(x_0)e_j =< df(x_0)e_j, \hat{e}_i > \quad \text{e quindi} \quad J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij}$$

ovvero, $J_f(x_0)$ é la matrice che ha per righe i vettori $\nabla f_i(x_0)$.

Funzioni $C^1(O)$. Una funzione é $C^1(O)$ se le sue derivate parziali esistono e sono continue in O; $f = (f_1, \ldots, f_m)$ é di classe $C^1(O)$ se lo sono le f_i.

Proposizione 1. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f **é differenziabile**.
Prova. Basta mostrarlo per funzioni scalari. Per semplicitá, lo dimostriamo per funzioni di due variabili. Da f_x, f_y continue segue

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta_\epsilon > 0 : \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(w) - \frac{\partial f}{\partial x}(v)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(w) - \frac{\partial f}{\partial y}(v)\right| \le \epsilon \qquad \forall\, w, v \in B_\delta(u)$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo a $\frac{d}{d\tau} f(\tau, y+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t)$ e a $\frac{d}{d\tau} f(x, \tau) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau)$ otteniamo

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x,y) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right] \right| =$$

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + f(x, y+t) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right| \le$$

$$\left| \int_x^{x+s} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] d\tau \right| + \left| \int_y^{y+t} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right] d\tau \right|$$

$$\le \epsilon \left(|s| + |t| \right) \quad \text{se} \quad s^2 + t^2 \le \delta_\epsilon^2$$

REGOLA DELLA CATENA

Siano $f : O \to \mathbf{R}^m$ differenziabile in $x \in O \subset \mathbf{R}^n$, $g : f(O) \to \mathbf{R}^p$ differenziabile in $f(x)$. Allora $g \circ f$ é differenziabile in x e

$$d(g \circ f)(x) \;=\; dg(f(x)) \circ df(x)$$

$$J_{g\circ f}(x) \;=\; J_g(f(x))\, J_f(x) \qquad\qquad \text{(prodotto righe per colonne)}$$

Prova. $\quad g\,(f(x+h)) = g\,(f(x) + df(x)h + \circ(\|h\|)) =$

$$g(f(x)) + dg(f(x))[df(x)h + \circ(\|h\|)] + \omega(df(x)h + \circ(\|h\|))$$

ove $\quad \|\omega(k)\| \le \epsilon \|k\| \quad$ se $\quad \|k\| \le \delta_\epsilon. \quad$ Dunque

$$g(f(x+h)) \;=\; g(f(x)) \;+\; dg(f(x)) \circ df(x)h + \;\circ(\|h\|) + \omega(df(x)h + \circ(\|h\|))$$

Ma siccome $\|df(x)h + \circ(\|h\|)\| \;\le\; \delta_\epsilon$ se $\|h\| \le \delta'_\epsilon$, abbiamo che, per tali h, $\|\omega(df(x)h + \circ(\|h\|)\| \le \epsilon \|df(x)h + \circ(\|h\|)\| \le C\epsilon\|h\|$. Da qui la tesi.
L'affermazione sulle matrici Jacobiane segue dal fatto che la matrice rappresentativa del prodotto di matrici é il prodotto delle matrici rappresentative (vedi sotto).

NOTA. Se indichiamo con $\mathcal{A}_L$, $\mathcal{A}_U$ e $\mathcal{A}_{U\circ L}$ le matrici rappresentative di $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, di $U \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$ e di $U \circ L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, allora

$$\mathcal{A}_{U\circ L} \;=\; \mathcal{A}_U\, \mathcal{A}_L$$

(prodotto di matrici). Infatti , indicate con $e_j, j = 1, \ldots, n$, $\hat{e}_i, i = 1, \ldots, m$, $\check{e}_l, l = 1, \ldots, p$ le basi (canoniche) in $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p$, si ha

$$\mathcal{A}_U \;=\; (< U(\hat{e}_i), \check{e}_l >)_{i=1,\ldots,m, l=1,\ldots,p} \qquad\qquad \mathcal{A}_L \;=\; (< Le_j, \hat{e}_i >)_{j=1,\ldots,n, i=1,\ldots,m}$$

$$\mathcal{A}_{U\circ L} \;= (< (U \circ L)(e_j), \check{e}_l >)_{j=1,\ldots,n; l=1,\ldots,p}$$

D'altra parte, $\quad < (U \circ L)(e_j), \check{e}_l > \;=\; < U\left(\sum_{i=1}^m < L(e_j), \hat{e}_i > \hat{e}_i, \right) \check{e}_l > =$ $= \sum_{i=1}^m < Le_j, \hat{e}_i >< U(\hat{e}_i), \check{e}_l >$ é l'elemento di posto lj della matrice prodotto

$$(< U(\hat{e}_i), \check{e}_l >)_{i=1,\ldots,m, l=1,\ldots,p}\, (< Le_j, \hat{e}_i >)_{j=1,\ldots,n, i=1,\ldots,m}$$

Corollario: derivazione lungo un cammino.

Siano $\quad \gamma \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n), \quad f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Allora

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \;= < \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) > = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t)$$

ESRCIZI E COMPLEMENTI

PROPOSIZIONE Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ uniformemente continua in $A \subset X$.

Allora esiste $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbf{R}$ continua e tale che $\overline{f}(x) = f(x)\ \forall x \in A$.

Prova. Caso $m = 1$. Fissato $\epsilon > 0$, sia δ_ϵ tale che $d(x, y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon$. Dato $x \in \overline{A}$, esistono $x_k \in A$ tali che $x_k \to_k x$. In particolare, x_k é di Cauchy, cioé $d(x_h, x_k) \le \delta_\epsilon$ per h, k grandi. Quindi, per uniforme continuitá, $|f(x_k) - f(x_h)| \le \epsilon$ e quindi $f(x_h)$ é di Cauchy e quindi converge a qualche y. Notiamo che tale y dipende solo da x e non dalla 'approssimante' x_k. Infatti, se $x'_k \to x$ e quindi, come sopra, $f(x'_k) \to y'$ per qualche y', si ha $|y - y'| \le |y - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x'_k)| + |f(x'_k - y'| \to_k 0$ e quindi $y = y'$. Dunque $\overline{f}(x) := \lim_k f(x_k)$ é ben definita su $\overline{A}$.
Resta da provare che $\overline{f}$ é continua. Ma questo si vede subito: $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - f(y)| \le 2\epsilon + |f(x_n) - f(y_n)|$ se n é abbastanza grande. Siccome poi, se $d(x, y) \le \delta_\epsilon$, risulta $d(x_n, y_n) \le 3\delta$ se n é grande, si ha che $|f(x_n) - f(y_n)| \le \epsilon$ se n é grande. In conclusione, $|f(x) - f(y)| \le 3\epsilon$.
Se $m > 1$, l'argomento precedente assicura che ogni componente ha una estensione continua a $\overline{A}$ e quindi f si prolunga a tutto $\overline{A}$.

A1 Sia $f : E \to \mathbf{R}$. f si dice *localmente costante in* E se

$$\forall x \in E, \quad \exists B_r(x) \quad \text{tale che} \quad f \text{ é costante in } B_r(x) \cap E$$

Notiamo che una funzione siffatta é necessariamente continua in E.

A2 f **localmente costante in** E **connesso per archi** $\Rightarrow f$ **é costante in** E.

Prova. Sia, per ogni $x \in E$, $B_{r(x)}(x)$ tale che f sia costante in $B_{r(x)}(x)$. Siano $x, y \in E$ e sia γ cammino da x a y. Notiamo che $(f \circ \gamma)([0, 1])$ é un intervallo, perché $f \circ \gamma$ é continua. Estraendo da $\{B_{r(x)}(x) : \quad x \in \gamma([0, 1])\}$, ricoprimento aperto del compatto $\gamma([0, 1])$, un sottoricoprimento finito, deduciamo che $(f \circ \gamma)([0, 1])$ é un insieme finito di punti, che, trattandosi di un intervallo, deve ridursi a un punto.

B Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ 'curva parametrica' in $\mathbf{R}^n$ e $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ biiezione. Allora $\tilde{\gamma}(\varphi(\tau)) : \tau \in [\alpha, \beta]$ é riparametrizzazione della 'curva' (o 'cammino') γ. Ovviamente le immagini ('sostegno' delle 'curve' γ e $\tilde{\gamma}$) $\gamma([a, b])$ e $\tilde{\gamma}([\alpha, \beta])$ coincidono: le due curve descrivono (percorrono..) in modo diverso lo stesso insieme di $\mathbf{R}^n$. Mostrare che, se γ é cammino differenziabile e φ é derivabile, con $\varphi(\tau) > 0 \quad \forall \tau$, allora γ e $\tilde{\gamma}$ hanno lo stesso versore tangente in ogni punto.

DERIVATE PARZIALI E DIFFERENZIABILITÁ:
esempi e controesempi

(i) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0)=0$

é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha anche derivate parziali, nulle, in $(0,0)$. Ma $\frac{\partial f}{\partial h}$ non esiste per alcun $h \neq e_i, i=1,2$, perché $t \to f(tx,ty)$ non é continua in $t=0$ (a meno che non sia $xy=0$). In particolare, f non é continua in zero:

una funzione puó avere derivate parziali in un punto senza essere continua in quel punto.

Notiamo che: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{1}{y}$ $\forall y \neq 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0,0)$.

(ii) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, $f(0,0) = 0$.

É $\frac{f(tx,ty)}{t} = \frac{x^2y}{t^2x^4+y^2} \to_{t\to 0} \frac{x^2}{y}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \frac{h_1^2}{h_2}$ $\forall\, h=(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2$. Siccome $f(x,x^2) \equiv \frac{1}{2}$, vediamo che

una funzione puó essere derivabile, in un punto, lungo tutte le direzioni senza essere continua in quel punto.

(iii) $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$, se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0)=0$

é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha derivate parziali, nulle, anche in $(0,0)$. Inoltre, in $(0,0)$, f **é derivabile in tutte le direzioni**: $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \lim_t \frac{f(tx,ty)}{t} = \lim_t \frac{tx^3y}{t^4x^6+y^2} = 0$. Tuttavia f **non é continua** in $(0,0)$, perché $f(x,x^3) \equiv \frac{1}{2}$. Dunque

una funzione puó avere derivate nulle lungo tutte le direzioni in un punto senza essere differenziabile in quel punto.

(iv) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,x^4y}{x^6+y^2}$ se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0)=0$

ha derivata nulla in tutte le direzioni, ed é anche continua, in $(0,0)$, ma non é differenziabile in $(0,0)$, perché $\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ non va a zero al tendere di x^2+y^2 a zero (vale infatti $\frac{1}{2}$ lungo la cubica $y=x^3$). Dunque

una funzione continua puó avere derivate nulle in tutte le direzioni in un punto senza essere differenziabile in quel punto.

Un esempi di uso della regola della catena: il gradiente in coordinate polari.

Data $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, scriviamo f in coordinate polari: $g(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Allora,

$$g_\rho = f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta$$

$$g_\theta = -f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$

$$f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho\cos\theta - \frac{1}{\rho}g_\theta\sin\theta, \quad f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho\sin\theta + \frac{1}{\rho}g_\theta\cos\theta$$

$$|\nabla f|^2(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho^2(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2}g_\theta^2(\rho, \theta)$$

CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE

Caso **n=1**. Sia dapprima γ grafico cartesiano in $\mathbf{R}^2$:

$$\gamma(t) = (t, f(t)),\ t \in (a, b) \qquad \gamma((a, b)) = \mathcal{G}_f$$

La differenziabilitá di γ equivale alla derivabilitá di f. I punti

$\gamma(t) + \tau\dot{\gamma}(t) = (t + \tau, f(t) + \tau f'(t)), \quad \tau \in \mathbf{R}$ sono i punti della retta tangente a γ:

eliminando il parametro τ troviamo infatti $y = f(t) + f'(t)(x - t)$. $\dot{\gamma}$ é in tal senso vettore tangente in $\gamma(t)$ a γ.
Piú in generale, γ é differenziabile in t significa che $\gamma(t + \tau) - [\gamma(t) + \tau\dot{\gamma}(t)] = \circ(\tau)$, cioé la curva γ é approssimata, con un errore di ordine superiore al primo, dalla retta $\mathbf{R}\dot{\gamma}(t)$ traslata in $\gamma(t)$, che é quindi la retta tangente a γ in $\gamma(t)$.

Se **n=k** $\leq$ **m**, $X = X(t_1, \ldots, t_k) = (X_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, X_m(t_1, \ldots, t_k))$ parametrizza una $k-$superfice in $\mathbf{R}^m$. Le curve su tale superfice, date da

$$t \to X(t, t_2, \ldots, t_k), \ldots, t \to X(t_1, \ldots, t)$$

determinano k vettori tangenti alla k-superfice, le k colonne di J_X, che indichiamo $\frac{\partial X}{\partial t_j} = (\frac{\partial X_1}{\partial t_j}, \ldots, \frac{\partial X_m}{\partial t_j})$.

Caso **m=1**. L'esistenza della derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ equivale alla differenziabilitá del cammino $\gamma(t) = (x + th, f(x + th))$ risultando $\dot{\gamma}(t) = (h, \frac{\partial f}{\partial h}(x))$. La curva γ é l'intersezione del grafico di f con il piano (in $\mathbf{R}^3$ se $n = 2$) passante per $(x, f(x))$ e per la retta $x + \mathbf{R}h$; il vettore $(h, \frac{\partial f}{\partial h}(x))$, applicato in $(x, f(x))$ é vettore tangente a tale retta, e quindi al grafico di f, $\mathcal{G}_f$. Al variare di h si ottengono tutti i vettori tangenti al grafico. Siccome $\frac{\partial f}{\partial h}(x) =< \nabla f(x)\ ,\ h\ >$, l'insieme di tali vettori,

$$\{(h, < \nabla f(x)\ ,\ h\ >) : \quad h \in \mathbf{R}^n\}$$

descrive un piano che, traslato in $(x, f(x))$, é il piano tangente a $\mathcal{G}_f$ in $(x, f(x))$. Ció si legge direttamente in $f(x) = f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0 > + \circ (\|x - x_0\|)$ $(x := x_0 + h,)$: il 'piano' $T_f(x_0) := \{(x, f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0 >)\}$, ovvero

$$z = f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0 >$$

approssima il grafico di f, in un intorno di $(x_0, f(x_0))$, con un errore di ordine superiore al primo: $T_f(x_0)$é il **piano tangente a $\mathcal{G}_f$ in** $(x_0, f(x_0))$.
Sezionando $\mathcal{G}_f$ e $T_f(x_0)$ con il piano $z = f(x_0)$ e proiettando tali sezioni sul piano $z = 0$, otteniamo la *'superfice' di livello* $\Sigma := \{x : f(x) = f(x_0)\}$ e la corrispondente **'retta' tangente** in x_0, data appunto da $< \nabla f(x_0), x - x_0 >= 0$. Che il gradiente di f in x_0 sia *ortogonale* alle 'superfici' di livello lo si vede scrivendo queste (quando possibile) in forma parametrica $X = X(t_1, \ldots, t_n)$, cosicché $f(X(t)) \equiv f(x_0)$, da cui, derivando $(t := (t_1, \ldots, t_n))$,

$$0 = \frac{\partial f(X(t_1, \ldots, t_n))}{\partial t_j} =< \nabla f(X(t)), \frac{\partial X}{\partial t_j} > \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

Infine, ∇f é direzione di massima pendenza del grafico di f in $(x, f(x))$:

$$\frac{d}{dt} f(x + th) =< \nabla f(x + th), h > \qquad \text{e} \qquad \sup_{\|h\|=1} < \nabla f(x), h >= \|\nabla f(x)\|$$