

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM110

29 Novembre 2011

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Ugo Bessi

Tutori: Filippo M. Bonci

TUTORATO 9

Il 29 Novembre 1945 viene dichiarata la Repubblica Popolare Federale di Jugoslavia

1. Dimostrare che esiste $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e suriettiva tale che ogni punto ha sempre esattamente tre retroimmagini.
2. Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice chiusa se porta chiusi in chiusi. Dimostrare che se $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora f è chiusa se e solo se:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad f(x) = \alpha \quad \text{se} \quad x \geq N \quad N \gg 1$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad f(x) = \beta \quad \text{se} \quad x \geq N \quad N \gg 1$$

Suggerimento: Considerare il comportamento di $f(x_n)$, quando x_n è una successione del chiuso che converge, o che tende a $+\infty$.

3. Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua; supponiamo esista

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)\cos(x)]$$

(a) Dimostrare che $\alpha = 0$

(b) Trovare un esempio di f continua tale che:

i.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\cos(x) = 0$$

ii.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{non esiste}$$

Suggerimento: Considerare una funzione che è sempre nulla, tranne in intorno sempre più piccoli attorno a $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

4. Dimostrare che non esiste $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e suriettiva tale che per ogni $y \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(y)$ consista in esattamente due punti.

Suggerimento: Utilizzare il teorema del valore intermedio.