Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM110

22 Novembre 2011

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Ugo Bessi

Tutori: Filippo M. Bonci

TUTORATO 8

Il 22 Novembre 1986 Mike Tyson batte per K.O. Trevor Berbick

1. Sia $(\mathfrak{X}, d)$ uno spazio metrico e sia $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{X}$. Diciamo che x é un punto interno ad $\mathfrak{E}$ se esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq \mathfrak{E}$. Sia $\mathring{\mathfrak{E}}$ la collezione di tutti i punti interni ad $\mathfrak{E}$.
   (a) Dimostrare che $\mathring{\mathfrak{E}}$ é sempre aperto
   (b) Dimostare che $\mathfrak{E}$ é aperto se e solo se $\mathring{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}$
   (c) Se $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{E}$, e $\mathfrak{G}$ é aperto, dimostrare che $\mathfrak{G} \subseteq \mathring{\mathfrak{E}}$
   (d) Dimostrare che il complemento di $\mathring{\mathfrak{E}}$ é la chiusura del complemento di $\mathfrak{E}$
   (e) É vero che $\mathfrak{E}$ e $\bar{\mathfrak{E}}$ hanno sempre lo stesso interno?
   (f) É vero che $\mathfrak{E}$ e $\mathring{\mathfrak{E}}$ hanno sempre la stessa chiusura?

2. Si condisideri lo spazio C_0 delle successioni $\{x_i\}_{i\geq 1}$ di reali tali che $\lim_{i\to+\infty} x_i \longrightarrow 0$. Si dimostri che le due funzioni su $C_0 \times C_0$ δ e ρ definite da:

$$\delta\left(\{x_i\}_{i\geq 1}, \{y_i\}_{i\geq 1}\right) = sup_{i\geq 1}|x_i - y_i|$$

$$\rho\left(\{x_i\}, \{y_i\}\right) = \sum_{i\geq 1} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

   sono distanze. Si dimostri inoltre che se la successione di C_0 $\{x_i^n\}_{i\geq 1}$ converge alla successione $\{x_i\}_{i\geq 1}$ nella metrica δ, allora converge sempre alla successione $\{x_i\}_{i\geq 1}$ nella metrica ρ. Si dimostri al contrario, che la convergenza nella metrica ρ non implica la convergenza nella metrica δ. Si dimostri infine che esistono successioni di Cauchy nella metrica ρ che non convergono in C_0

   Suggerimento: Considerare $x_i^n = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ 1 & i = n \end{cases}$

3. Un intorno di un punto é un insieme che contiene un aperto che contiene quel punto. Si dimostri che uno spazio metrico é uno spazio di Hausdorff: in altre parole, dati due punti $x \neq y$, esiste un intorno U_x di x e un intorno U_y di y tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.