Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM110

15 Novembre 2011

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Ugo Bessi

Tutore: Filippo M. Bonci

Tutorato 7

Il 15 Novembre 2006 crolla il campanile di Nole Torinese

1. Si consideri l'insieme di tutte le successioni reali $\{x_n\}_{n\geq 1}$ tali che $x_n \to 0$ e chiamiamo tale insieme c_0. Definiamo su c_0 la seguente distanza:

$$d\Big(\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1}\Big) = sup_{n\geq 1}|x_n - y_n|$$

   (a) Dimostrare che d é una distanza

   (b) Sia $\Big\{\{x_n^k\}_{n\geq 1}\Big\}_{k\geq 1}$ una successione di elementi di c_0. Si supponga che tale successione sia di Cauchy. Dimostrare che, per n fissato, $\{x_n^k\}_{k\geq 1}$ é di Cauchy in $\mathbb{R}$ e si chiami $\overline{x}_n$ il suo limite.

   (c) Con le notazioni del punto sopra si dimostri che: $\{x_n^k\}_{n\geq 1} \longrightarrow \{\overline{x}_n\}$ in c_0. In altre parole, c_0 é completo.

2. Siano $d_1, ..., d_n$ delle distanze sull'insieme Y e siano $\alpha_1, ..., \alpha_n$ dei numeri reali postivi. Dimostrare che:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x, y)$$

   é una distanza su Y

3. Dato uno spazio metrico $(\mathfrak{X}, d)$, dimostrare che:

$$\tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

   é una metrica su $\mathfrak{X}$. Dimostrare inoltre che $x_n \longrightarrow x$ nella metrica d se e solo se $x_n \longrightarrow x$ nella metrica $\tilde{d}$

4. Siano $(\mathfrak{Y}_1, d_1)$ e $(\mathfrak{Y}_2, d_2)$ due spazi metrici. Si condisideri:

$$(\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2) = \{(y_1, y_2) : y_1 \in \mathfrak{Y}_1, y_2 \in \mathfrak{Y}_2\}$$

   Dimostrare che:

$$\tilde{d}((y_1, y_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)) := d_1(y_1, \bar{y}_1) + d_2(y_2, \bar{y}_2)$$

   é una metrica su $\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2$

5. Sia $X = (0,1)$. Dimostrare che:

$$d(x,y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

é una distanza du X

6. Sia $\mathfrak{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Per z_1 e z_2 in $\mathfrak{X}$ siano u e v le intersezioni della retta passante per z_1 e z_2 con $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sia v l'intersezione piú vicina a z_1 e u quella piú vicina a z_2. Si dimostri che:

$$d(z_1, z_2) = log(\frac{|z_1 - u||z_2 - v|}{|z_1 - v||z_2 - u|})$$

é una distanza su $\mathfrak{X}$