

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM110

11 Ottobre 2011

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Ugo Bessi

Tutore: Filippo M. Bonci

TUTORATO 3

L'11 Ottobre 1968 la NASA lancia l'Apollo 7

1. Dando per buono che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dimostrare che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

2. Dando per buono che $|\sin(x)| \leq |x|$, dimostrare che la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$

3. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti serie convergono e per quali convergono assolutamente:

$$\begin{array}{cc} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n+1} & \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \alpha^n & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{n} \end{array}$$

4. Data la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

dimostrare che:

(a) È convergente se i termini a_n sono così definiti per ricorrenza:

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}$$

(b) Diverge se i termini a_n sono così definiti per ricorrenza:

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$$