

ST1- 1 ESONERO: 3-11-2010 (Orlandi)

Esercizio 1 (6 punti) Siano X and Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \chi_{(0, \infty)}(x)$.

- (1) Si determini la distribuzione della variabile aleatoria $Z = \frac{X}{Y}$.
- (2) $\sin X$ e Y^2 sono stocasticamente indipendenti ?

Esercizio 2 (18 punti) Siano (X_1, \dots, X_n) indipendenti estratti da una popolazione con distribuzione

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{(1-\theta)}{\theta}}, \quad x \in (0, 1). \quad \theta > 0$$

- (1) Determinare la distribuzione di $Y = -\log X$, dove X e' distribuita secondo $f(x, \theta)$. Determinare media e varianza di Y .
- (2) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ .
- (3) É uno stimatore non distorto? (motivare).
- (4) Determinare l' errore quadratico medio.
- (5) Si determini la distribuzione di T_n .
- (6) Si consideri la successione degli stimatori T_n al variare della lunghezza del campione n , $\{T_n\}_n$. Si dica cosa si intende per successione di stimatori *semplicemente consistenti* e si verifichi che $\{T_n\}_n$ lo sia.

Esercizio 3 (6 punti)

Siano (X_1, \dots, X_n) indipendenti estratti da una popolazione con distribuzione uniforme nell'intervallo $(\theta - 1, \theta + 1)$.

- (1) Trovare lo stimatore di θ con il metodo dei momenti.
- (2) É uno stimatore non distorto? (motivare).
- (3) Date le seguenti 5 osservazioni di X dare una stima puntuale di θ :

6, 61 7, 70 6, 98 8, 36 7, 26