AM210: Tracce delle lezioni- VII Settimana

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Sia Λ un insieme, I un intervallo e $f : \Lambda \times I \to \mathbf{R}$ una famiglia di funzioni reali di variabile reale dipendente da un 'parametro' $\lambda \in \Lambda$. Ad esempio, se $\Lambda = \mathbf{N}$, si tratta di una successione di funzioni in I; se $f(\lambda, x) = x^2 - 2\lambda x + \log \lambda$, si tratta di una famiglia di polinomi, dipendenti dal parametro (reale positivo) λ (qui, $I = \mathbf{R}$).
Se, per ogni fissato λ, la funzione $x \to f(\lambda, x)$ é continua in $I = [a, b]$ e quindi integrabile in $[a, b]$, resta definita la funzione nella variabile λ, data da

$$\lambda \to \int_a^b f(\lambda, t)dt$$

Parleremo anche di *integrale dipendente da parametro* (il parametro λ).
Naturalmente si potrá considerare anche il caso in cui I sia un intervallo aperto e/o illimitato, ed in tal caso richiederemo alla funzione $x \to f(\lambda, x)$ di essere integrabile in senso improprio (o generalizzato) in I. Ad esempio, la funzione

$$\lambda \to \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt$$

é definita per ogni valore del parametro λ in $[0, +\infty)$. Qui $I = [0, +\infty)$.
Se $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$, potremo chiederci quale 'regolaritá' (continuitá, derivabilitá..) abbia tale funzione, ovvero con quale regolaritá l'integrale dipenda dal parametro λ.

DIPENDENZA CONTINUA

Sia $f \in C(K \times (a, b)), K \subset \overline{B_r(x_0)}$ un compatto in $\mathbf{R}^n$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Se f é **equidominata** in (a, b) (dominata *uniformemente al variare di* x in K), cioé

$$\exists \; g \in C((a, b)) : \quad |f(x, t)| \le g(t) \quad \forall x \in K, \quad t \in (a, b) \quad \text{e} \quad \int_a^b g(t)dt < +\infty$$

allora $\quad x \to \int_a^b f(x, t)\, dt \;$ é continua in K, ovvero

$$x_j \in K, \quad x_j \to_j x \in K \quad \Rightarrow \quad \lim_j \int_a^b f(x_j, t)\, dt = \int_a^b \lim_j f(x_j, t)\, dt$$

Prova. Notiamo innanzi tutto che $\int\limits_a^b |f(x,t)|\,dt \le \int\limits_a^b g(t)\,dt < +\infty \quad \forall x \in K$, cioé, per ogni $x \in K$, la funzione $\quad t \to f(x,t) \quad$ é (assolutamente) integrabile (in senso generalizzato) in (a,b). Fissiamo ora $\epsilon > 0$.
Da $\quad \int\limits_a^b g(t)\,dt < +\infty \quad$ segue che esistono $\quad a < a_\epsilon < b_\epsilon < b\,$ e $\,\delta_\epsilon > 0 \quad$ tali che

$$\int\limits_a^{a_\epsilon} g(t)dt \;+\; \int\limits_{b_\epsilon}^{b} g(t)dt \;\le\; \frac{\epsilon}{4}$$

mentre, dalla continuitá di f sul compatto $K \times [a_\epsilon, b_\epsilon]$ segue (teorema di Heine-Cantor) che

$$\sup_{t\in[a_\epsilon,b_\epsilon]} |f(x_j,t) - f(x,t)| \le \tfrac{\epsilon}{2(b_\epsilon - a_\epsilon)} \qquad \text{per tutti i } j \text{ grandi.}$$

Quindi

$$\left|\int\limits_a^b f(x_j,t) - f(x,t)\,dt\right| \le 2\int\limits_a^{a_\epsilon} g(t)dt + 2\int\limits_{b_\epsilon}^{b} g(t)dt + \int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} |f(x_j,t) - f(x,t)|\,dt \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

NOTA 1. Si tratta di un *teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale* in ipotesi di *convergenza uniforme + equidominatezza.* La continuitá di f assicura che

$$\sup_{t\in K} |f(x_j,t) - f(x,t)| \to_j 0 \qquad \text{per ogni } K \subset I \text{ compatto}$$

ovvero $\varphi_j(t) := f(x_j,t) \to_j \varphi(t) := f(x,t) \quad$ *uniformemente (in t) sui compatti.*
In modo analogo, se, per ogni $t \in I$, esiste $f(t) := \lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x,t)$ e tale limite *é uniforme* sui compatti di I (e quindi $f \in C(I)$), cioé

$$\sup_{t\in K} |f(x,t) - f(t)| \to_{\|x\|\to\infty} 0 \qquad \text{per ogni } K \subset I \text{ compatto}$$

ed $f(x,t)$ é equidominata, allora

$$\int\limits_a^b f(x,t)dt \to_{\|x\|\to\infty} \int\limits_a^b f(t)dt$$

Il teorema di dipendenza continua é dunque un teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale in ipotesi di 'uniforme convergenza sui compatti' piú una proprietá di equidominatezza.

NOTA 2. L'equidominatezza é essenziale. Sia, ad esempio,

$$f(x,t) = \frac{t}{1+|t|^{2+x^2}}, \qquad t \in \mathbf{R}, \quad |x| < 1$$

Tale f é continua in $\mathbf{R}^2$ e, se $x \neq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{1+|t|^{2+x^2}} dt < \infty$ per il teorema del confronto. Ma $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt = \infty$: $f(0,t)$ non é neppure integrabile su $\mathbf{R}$! Dunque $f(x,t)$ non é equidominata rispetto a $x \in [-\delta, \delta]$. Notiamo che la continuitá di f assicura che

$$f(x,t) \to_{x\to 0} f(0,t) = \tfrac{t}{t^2+1} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \text{uniformemente sui compatti}$$

E in effetti la convergenza é uniforme su tutto $\mathbf{R}$ perché $|f(x,t)| \leq |f(0,t)|$ e $f(0,t) \to_{t\to\infty} 0$. Il carattere uniforme della convergenza si vede anche direttamente stimando $\max_t |f(x,t) - f(0,t)| \leq \max_t \frac{|t(1-|t|^{x^2})|}{1+|t|^{x^2+2}}$:

$$\max_{t\geq 1} \frac{t(t^{x^2}-1)}{|t|^{x^2+2}} = \max_{t\in[0,1]} t(1-t^{x^2}) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}} \frac{x^2}{1+x^2} \to_{x\to 0} 0$$

Applicazione: una prova del Lemma di Schwartz. Abbiamo osservato che

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

se e solo se

$$\lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk}\right] =$$

$$= \lim_{k\to 0}\left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y)}{hk}\right]$$

E ció sicuramente accade se esiste

$$\lim_{k^2+h^2\to 0}\left[\frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y)}{hk}\right]$$

Dal Teorema fondamentale del calcolo segue che

$$\left[\tfrac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y)}{hk}\right] = \tfrac{1}{hk}\int_0^1 \tfrac{d}{dt}\left[f(x+h,y+tk) - f(x,y+tk)\right] dt =$$

$$= \tfrac{1}{h}\int_0^1 \left[f_y(x+h,y+tk) - f_y(x,y+tk)\right] dt = \tfrac{1}{h}\int_0^1 \left[\int_0^1 \tfrac{d}{ds} f_y(x+sh,y+tk)ds\right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 f_{yx}(x+sh, y+tk)ds \right] dt$$

La validitá di questa formula risiede nella continuitá dell'integrale dipendente da parametro $t \to \int_0^1 f_{yx}(x+sh, y+tk)ds$. Infine, dalla continuitá di f_{yx} segue che $\int_0^1 \left[\int_0^1 f_{yx}(x+sh, y+tk)ds \right] dt \to_{k^2+h^2 \to 0} \int_0^1 \left[\int_0^1 f_{yx}(x, y)ds \right] dt = f_{yx}(x, y)$.

ESEMPIO 1 *(integrale di Dirichlet).* $f(x,t) = \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$, $t > 0$, $x \geq 0$, é equidominata in $(0, +\infty)$ al variare di x in $[\underline{x}, +\infty)$, quale che sia $\underline{x} > 0$:

$$|f(x,t)| \leq g(t) := e^{-t\underline{x}} \quad \forall t > 0, \quad x \geq \underline{x} > 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t\underline{x}} dt = \frac{1}{\underline{x}} < +\infty$$

e quindi $\quad h(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \quad$ é continua in ogni $x > 0$.

Notiamo che h é definita anche in $x = 0$. Il Teorema sulla dipendenza continua non si applica tuttavia in questo caso, e non si puó quindi affermare la continuitá di h in $x = 0$, ovvero, tale Teorema non assicura che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \to_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \qquad (?)$$

perché *manca l'equidominatezza fino a zero.* Infatti

$$\exists g \geq 0 \quad \text{tale che} \quad \int_0^{\infty} g < \infty \quad \text{e} \quad |\tfrac{\sin t}{t} e^{-tx}| \leq g(t) \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\int_0^{+\infty} \left|\tfrac{\sin t}{t}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} g dt < \infty, \quad \text{mentre si sa che} \quad \int_0^{+\infty} \left|\tfrac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty.$$

Proviamo con un argomento ad hoc la continuitá in $x = 0$.

Scriviamo $G(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$, $\quad G(\infty) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ e quindi $|G(t) - G(\infty| \leq \epsilon$ se $t \geq t_\epsilon$.

Notiamo anche che G é limitata: $\exists M$ tale che $\quad |G(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$. Integrando per parti ed effettuando quindi il cambio di variabile $s := tx$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = x \int_0^{+\infty} G(t) e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} G(\frac{s}{x}) e^{-s} ds \to_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

perché $\quad \int_0^{+\infty} G(\frac{s}{x}) e^{-s} ds - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} [G(\frac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds \quad$ e

$|\int_0^{\delta} [G(\frac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds| \leq 2M[1 - e^{-\delta}]$, $\quad \int_\delta^{\infty} |G(\frac{s}{x}) - G(\infty)| e^{-s} ds \leq \epsilon$ se $\frac{\delta}{x} \geq t_\epsilon$.

DERIVAZIONE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE.

Sia $f \in C(B_r(x_0) \times (a,b))$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Supponiamo che

i) $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ esiste ed é continua in $B_r(x_0) \times (a,b)$

ii) $\exists g$ integrabile in (a,b) : $|f(x,t)|+|f_{x_j}(x,t)| \le g(t) \quad \forall t, x.$

Allora $x \to \int_a^b f(x,t)\,dt$ é derivabile in x_j $\forall\, x \in B_r(x_0)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt$$

Prova. Fissato $x \in B_r(x_0)$, sia, per $t \in (a,b)$,

$$F(s,t) := \frac{f(x+se_j,t) - f(x,t)}{s} \quad \text{se} \quad 0 < |s| \le \delta, \qquad F(0,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)$$

Notiamo che F é continua in $(0,t)$ per come é definita, e quindi, viste le ipotesi su f, é continua in tutto $[-\delta,\delta] \times (a,b)$. Siccome, per il Teorema Fondamentale del Calcolo, $|F(s,t)| = \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\tau s e_j, t) \right| \le g(t)$, dal teorema sulla dipendenza continua segue che $s \to \int_a^b F(s,t)dt$ é continua in $0 \in [-\delta,\delta]$, cioé appunto

$$\frac{\int_a^b f(x+se_j,t)dt - \int_a^b f(x,t)dt}{h} = \int_a^b F(s,t)dt \to_{s\to 0} \int_a^b F(0,t)dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dt$$

ESEMPIO 1 *continuazione.* Sia $f(x,t) = \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}$.
Siccome f e $f_x = -\sin t e^{-tx}$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$ sono continue ed equidominate in $[\underline{x}, +\infty) \times (0,\infty)$, é vero che $\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\,dt = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t\,dt.$
Integrando per parti si ottiene

$$\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\,dt = -\frac{1}{1+x^2}$$

In particolare,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\,dt := c - \arctan x$$

Mandando x a zero, troviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt := c$$

Per determinare c, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \ = \ 0$$

perché $\quad |\int_0^{\delta} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt| \le \delta \quad$ e $\quad |\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt| \le \int_{\delta}^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{e^{-\delta x}}{x} \to_{x\to+\infty} 0.$

Quindi $\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}\, dt \quad = \quad c - \arctan x \quad \Rightarrow \quad 0 = c - \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt - \frac{\pi}{2}$

Dunque $\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt \ = \ \frac{\pi}{2} \qquad$ **(integrale di Dirichlet)**

ESEMPIO 2 *(la funzione* Γ *di Eulero).*

$$\Gamma(s) \ := \int_0^{\infty} t^{s-1}\, e^{-t}\, dt, \quad s > 0$$

La funzione Γ é definita in $(0, +\infty)$ perché $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-s}} < +\infty \ \ \forall s > 0$ e $e^{-t}\, t^{s-1}$ va a zero, per t che va all'infinito, piú rapidamente di ogni potenza di $\frac{1}{t}$. Inoltre, $(t, s) \to t^{s-1}\, e^{-t}$ é equidominata se $s \in [\underline{s}, \overline{s}]$, $\underline{s} > 0$, e quindi $\Gamma(s)$ é continua.

Siccome $\frac{\partial}{\partial s} t^{s-1} e^{-t} = t^{s-1} \log t\, e^{-t}$ é ugualmente continua ed equidominata, Γ é derivabile, con $\Gamma'(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \log t\, e^{-t} dt, \quad s > 0.$ Γ é infatti C^{∞}. Ad esempio, $\Gamma''(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\, (\log t)^2\, e^{-t}\, dt$ (Γ é strettamente convessa). Infine, integrando per parti, $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\, e^{-t}\, dt \ = \ \frac{1}{s} \int_0^{\infty} t^{s}\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$. In particolare, siccome $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Il *comportamento asintotico di* $n!$ é descritto dalla **Formula di Stirling**

$$\Gamma(s+1) \ = \ s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \ + \ \circ(1) \right], \quad \text{per} \quad s \to +\infty$$

APPENDICE: Una dimostrazione della Formula di Stirling

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;+\; \circ(1) \right], \quad \text{per} \quad s \to +\infty$$

Effettuando il cambio di variabile $t = s\tau$, troviamo

$$\Gamma(s+1) := \int_0^\infty t^s\, e^{-t}\, dt = s^s \int_0^\infty \tau^s e^{-s\tau} s d\tau \;=\; s^{s+1}\, e^{-s} \int_0^\infty e^{-s(\tau - \log\tau\, - 1)}\, d\tau$$

e ponendo poi $t = \tau - 1$ troviamo

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+1}\, e^{-s} \int_{-1}^\infty e^{-s\,[t - \log(1+t)]}\, dt$$

Osserviamo che $\frac{d}{dt}[t - \log(t+1)] = \frac{t}{t+1}$ e quindi $m(t) := t - \log(t+1)$ ha un minimo assoluto in $t = 0$ in cui vale zero. In particolare, $|t| \geq \delta \Rightarrow m(t) \geq c_\delta > 0$. Inoltre, $m(t) \geq \frac{t}{2}$ per t grande, diciamo $t \geq M$. Si trova allora $\alpha > 0$ tale che

$$\int_{-1}^{-\delta} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt + \int_{\delta}^{M} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt + \int_{M}^{+\infty} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt \leq e^{-\alpha s}$$

Stimiamo ora l'integrale in $[-\delta, \delta]$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ tale che

$$\frac{t^2}{2+\epsilon} \leq t - \log(1+t) \leq \frac{t^2}{2-\epsilon} \qquad \forall t \in [-\delta_\epsilon, \delta_e]$$

Dalla diseguaglianza di sinistra, ed usando poi il cambio di variabile $x = \sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}t$,

$$\int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt \leq \int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} e^{-\frac{st^2}{2+\epsilon}} = 2\frac{\sqrt{2+\epsilon}}{\sqrt{s}} \int_0^{\sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}\delta_\epsilon} e^{-x^2} dx$$

mentre la diseguaglianza di destra dá allo stesso modo

$$\int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} e^{-s\,[t-\log(1+t)]}\, dt \geq 2\frac{\sqrt{2-\epsilon}}{\sqrt{s}} \int_0^{\sqrt{\frac{s}{2-\epsilon}}\delta_\epsilon} e^{-x^2} dx$$

Combinando le diseguaglianze ottenute conludiamo che

$$\circ(1) + 2\sqrt{2-\epsilon} \int_0^{\sqrt{\frac{s}{2-\epsilon}}\delta_\epsilon} e^{-x^2} dx \leq \frac{\Gamma(s+1)}{s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s}} \leq \circ(1) + 2\sqrt{2+\epsilon} \int_0^{\sqrt{\frac{s}{2+\epsilon}}\delta_\epsilon} e^{-x^2} dx$$

e ció conclude la prova della formula di Stirling.