# AM2 2010-11: Tracce delle lezioni- III Settimana

## SPAZI METRICI: ELEMENTI DI TOPOLOGIA

Sia $(X,d)$ spazio metrico.
**1**. $O \subset X$ si dice **aperto** se $\forall u \in O\ \exists r > 0 : \ B_r(u) \subset O$ .
Indicheremo con $\mathcal{O}$ la famiglia degli aperti di $(X,d)$. Esempi.
La palla 'aperta' $B_r(x_0)$ é un aperto, perché, se $x \in B_r(x_0)$, $\delta := d(x,x_0)$, allora

$$d(y,x) < r - \delta \ \Rightarrow d(y,x_0) \le d(y,x) + d(x,x_0) < r - \delta + \delta = r$$

Se $f \in C(X,\mathbf{R})$ allora $\{x : \ f(x) < c\}$ é aperto per ogni $c \in \mathbf{R}$. Infatti, se $f(x) < c$ e $f(x) + \epsilon < c$, e se $\delta$ é tale che $d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$, allora $f(y) = f(y) - f(x) + f(x) < \epsilon + c - \epsilon = c$.

**2**. $F \subset X$ si dice **chiuso** se $F'$ (il complementare di $F$) é aperto
Ad esempio, $f \in C(X,\mathbf{R}) \Rightarrow \{x : \ f(x) \le c\}$ é chiuso per ogni $c \in \mathbf{R}$. In particolare, una palla chiusa é un insieme chiuso.

**3**. (i) $O_\alpha \in \mathcal{O} \quad \alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} O_\alpha \in \mathcal{O}$
(ii) Ogni aperto in $\mathbf{R}^n$ é unione numerabile di palle aperte (o chiuse)
(iii) Se $O_\alpha$ sono sottinsiemi aperti in $\mathbf{R}^n$, esistono $\alpha_j, j \in \mathbf{N}$ tali che $\bigcup_\alpha O_\alpha = \bigcup_j O_{\alpha_j}$

Prova. (i) $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha \Rightarrow \exists\, \overline{\alpha}, \exists B_r(x) : \quad B_r(x) \subset O_{\overline{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha$. Se $x \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} O_\alpha$ esistono $B_{r_\alpha}(x) \subset O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_0$. Se $r \le r_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{A}_0$ allora $B_r(x) \subset \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} B_\alpha \subset \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} O_\alpha$
(ii) Sia $\mathcal{B}_O := \{B_r(x) \subset O : \quad r \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Q}^n\}$; $\mathcal{B}_O$ é numerabile. É $O = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_O} B$.
Infatti, se $B_{3r}(\hat{x}) \subset O$, allora $\hat{x} \in B_q(x) \in \mathcal{B}_O$ ove $q \in (r, 2r)$ e $\|x - \hat{x}\| < r$.
(iii) Sia $\mathcal{B} := \{B_r(x) : \quad r \in \mathbf{Q},\ x \in \mathbf{Q}^n,\ B_r(x) \subset O_\alpha \text{ per qualche } \alpha\}$. $\mathcal{B}$ é famiglia numerabile di palle aperte, che si puó quindi indicare come $\{B_j : \ j \in \mathbf{N}\}$. Come sopra, $O_\alpha = \bigcup_{B_j \subset O_\alpha} B_j$. Sia, per ogni $j$, $\alpha_j$ tale che $B_j \subset O_{\alpha_j}$. Allora

$$\cup_\alpha O_\alpha \subset \cup_j B_j \subset \cup_j O_{\alpha_j} \subset \cup_\alpha O_\alpha$$

**4**. $F_\alpha$ chiusi, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\Rightarrow \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha$ e $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} F_\alpha$ sono chiusi

In particolare, se $\mathcal{F}_A$ indica la classe dei chiusi contenenti $A$, posto $\overline{A} : \bigcap_{F\in\mathcal{F}_A} F$, allora $\overline{A}$ é chiuso, ed é quindi il piú piccolo chiuso contenente $A$ ($\overline{A}$ é la **chiusura** di $A$).

Prova. $\left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha\right)' = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} F'_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} F_\alpha\right)' = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} F'_\alpha \in \mathcal{O}$

**5**. $F \subset X$ é **chiuso** $\Leftrightarrow$ $(u_k \in F,\ u_k \to_k u \quad \Rightarrow \quad u \in F)$ $\Leftrightarrow$ $F = \overline{F}$.
*Prova della prima equivalenza.* $\Rightarrow$: Sia $F$ chiuso, e siano $u_k \in F$, $u_k \to_k u$. Se $u \notin F$, allora $\exists r > 0 :\ B_r(u) \subset F'$ mentre $u_k \in F \cap B_r(u)$ definitivamente.
$\Leftarrow$: Per assurdo: $F'$ non é aperto $\Rightarrow$ $\exists u \in F'$ tale che $D_r(u) \cap F \neq \emptyset$ $\forall r > 0$ $\Rightarrow$: $\forall k,\ \exists\ u_k \in D_{\frac{1}{k}}(u) \cap F$ $\Rightarrow$ $u_k \in F$ e $u_k \to_k u$ $\Rightarrow$ $u \in F$.
*Prova della seconda equivalenza.* Se $F = \overline{F}$, allora $F$ é chiuso perché $\overline{F}$ é chiuso. Viceversa, in primo luogo, $F \subset \overline{F}$; poi, $\overline{F} \subset F$ perché $\overline{F}$ é contenuto in ogni chiuso contenente $F$, ed $F$ é chiuso.
**6**. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\, x_j \in A :\quad x_j \to_j x$.
Prova. Sia $x \in \overline{A}$ e supponiamo, per assurdo, che non ci sia $x_j \in A$ tale che $x_j \to x$. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Ma allora $(B_r(x))'$ , essendo un chiuso contenente $A$, contiene $\overline{A}$, che contiene $x$: assurdo. Viceversa, se $x_j \in A :\quad x_j \to_j x$ e $F$ é un chiuso contenente $A$, allora $x \in F$ e quindi, per l'arbitrarietá di $F$, $x \in \overline{A}$.
**7**. $B \subset \mathbf{R}^n$ si dice **limitato** se esiste $r > 0 :\ B \subset B_r$
**8**. $K \subset X$ si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto di $K$ ammette un sottoricoprimento finito: cioé, se $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in \mathcal{A}$,

$$K \subset \bigcup_\alpha O_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_l \ \ \textit{tali che}\ \ K \subset \bigcup_{j=1,\dots,l} O_{\alpha_j}$$

**PROPOSIZIONE 1** Sia $K \subset \mathbf{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(i) $K$ é chiuso e limitato
(ii) $x_k \in K \quad \Rightarrow \quad \exists x_{k_j}, x \in K$ tali che $x_{k_j} \to_j x$
(iii) $K$ é compatto
Prova.(i) $\Rightarrow$ (ii): $u_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in K \ \Rightarrow\ \sup_k |x_{k,j}| < +\infty$ per tutti i $j = 1, \dots, n \ \Rightarrow\ \exists k_i,\ \exists\ x_1, \dots, x_n :\ x_{k_i,j} \to_i x_j$ per $j = 1, \dots, n \ \Rightarrow\ u_{k_i} \to_i u$ $u = (x_1, \dots, x_n) \in K$ perché $K$ é chiuso.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Dal punto 3-(iii) sappiamo che possiamo supporre $\mathcal{A} = \mathbf{N}$. Supponiamo, per assurdo, che per ogni $k \in \mathbf{N}$ esista $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k} O_i$. Sia $x_{k_j} \to_j x \in K$. Siccome $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$, esiste $k_0$ tale che $x \in O_{k_0}$ e quindi $x_{k_j} \in O_{k_0}$ per $j$ grande, mentre $x_{k_j} \notin O_i$ se $i \leq k_j$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Siccome $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, ove $D_i$ é la palla di raggio $i \in \mathbf{N}$ e centro l'origine, $K \subset D_{\hat{i}}$ per qualche $\hat{i}$. Per provare che $K$ é chiuso, supponiamo che non lo sia: esiste $x_k \in K$, $\hat{x} \notin K$ con $x_k \to_k \hat{x}$. Siccome $K \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ si ha che $K \subset \bigcup_k \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} = \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ e quindi $K \subset \bigcup_{k=1}^{N} \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} =$ $= \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{N}\}$. Ma $x_k \in K$ e $\|x_k - \hat{x}\| < \frac{1}{N}$ se $k$ é grande.

Nel seguito, $(X,d),(Y,\rho)$ sono spazi metrici e $f : X \to Y$.

**PROPOSIZIONE 2**

$$f \text{ é continua} \Leftrightarrow (O \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{O}) \Leftrightarrow (F \quad \text{chiuso} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(F) \quad \text{é chiuso})$$

$\Rightarrow$: sia $x \in f^{-1}(O)$, ovvero $f(x) \in O$ e quindi $B_\epsilon(f(x)) \subset O$ per un $\epsilon > 0$. Ma, per continuitá, esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset O$ e quindi $B_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$.
$\Leftarrow$: $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$ aperto $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \Rightarrow f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ che dice appunto che $f$ é continua in $x$.

**TEOREMA** $f \in C(K,Y)$, $K \subset X$ compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ é compatto.
In particolare , se $Y = \mathbf{R}$, esistono $\underline{u},\ \overline{u} \in K$ : $\inf_K f = f(\underline{u}),\ f(\overline{u}) = \sup_K f$.

Prova. $O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ aperti in $\mathbf{R}^m$, $f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha \quad \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} f^{-1}(O_\alpha) \quad \Rightarrow$ $\exists \mathcal{A}_0$ finito tale che $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_0} f^{-1}(O_\alpha) \quad \Rightarrow f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_0} O_\alpha \Rightarrow f(K)$ é compatto.

**Variante di Weierstrass** Sia $F \subset \mathbf{R}^n$ chiuso. Sia $f \in C(F)$ tale che

(i) **(coercivitá)** $u_n \in C, \|u_n\| \to_n +\infty \;\Rightarrow\; f(u_n) \to_n +\infty$

(ii) **(semicontinuitá inferiore)** $u_n \in C, u_n \to u \;\Rightarrow\; \liminf_n f(u_n) \geq f(u)$.

$$\text{Allora} \qquad \exists\, \underline{u} \in C \quad \text{tale che} \qquad f(\underline{u}) = \inf_C f$$

Infatti, se $u_n \in C, f(u_n) \to_n \inf\limits_C f$, allora $u_n$ é limitata in virtú della coercivitá, e quindi si puó supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che $u_n$ converga a qualche $u \in C$ (perché $C$ é chiuso). Da (ii) segue $\inf\limits_C f = \lim_n f(u_n) \geq f(u)$.

**Uniforme continuitá.** $f : A \to Y$ é **uniformemente continua** in $A \subset X$ sse $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad (u, v \in K, \;\; d(u,v) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \rho(f(u), f(v)) \leq \epsilon)$

**Lipschitzianitá.** $f$ si dice Lipschitziana ( o Lip) di costante $L > 0$ se

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x,y)$$

Una funzione si dice localmente Lipscitziana in $A$ se, per ogni $x \in A$, é Lip su qualche $B_{r(x)}(x) \cap A$ . O, equivalentemente (vedi Es. 7), se é Lip sui compatti.

Chiaramente, oghi funzione Lip é anche uniformemente continua, ma non viceversa. Ad esempio, $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in R$ é uniformemente continua (in $\{|x| \leq 1\}$

per Heine-Cantor, ed in $\{|x| \geq 1\}$, perché $x, y \geq 1 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|)$) ma non é Lip, perché $\sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = +\infty$.

**PROPOSIZIONE 3** Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ uniformemente continua in $A \subset X$. Allora esiste $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbf{R}$ continua e tale che $\overline{f}(x) = f(x)\, \forall x \in A$.

Prova. Caso $m = 1$. Fissato $\epsilon > 0$, sia $\delta_\epsilon$ tale che $d(x, y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Dato $x \in \overline{A}$, esistono $x_k \in A$ tali che $x_k \to_k x$. In particolare, $x_k$ é di Cauchy, cioé $d(x_h, x_k) \leq \delta_\epsilon$ per $h, k$ grandi. Quindi, per uniforme continuitá, $|f(x_k) - f(x_h)| \leq \epsilon$ e quindi $f(x_h)$ é di Cauchy e quindi converge a qualche $y$. Notiamo che tale $y$ dipende solo da $x$ e non dalla 'approssimante' $x_k$. Infatti, se $x'_k \to x$ e quindi, come sopra, $f(x'_k) \to y'$ per qualche $y'$, si ha $|y - y'| \leq |y - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x'_k)| + |f(x'_k - y'| \to_k 0$ e quindi $y = y'$. Dunque $\overline{f}(x) := \lim_k f(x_k)$ é ben definita su $\overline{A}$.
Resta da provare che $\overline{f}$ é continua. Ma questo si vede subito: $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - f(y)| \leq 2\epsilon + |f(x_n) - f(y_n)|$ se $n$ é abbastanza grande. Siccome poi, se $d(x, y) \leq \delta_\epsilon$, risulta $d(x_n, y_n) \leq 3\delta$ se $n$ é grande, si ha che $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \epsilon$ se $n$ é grande. In conclusione, $|f(x) - f(y)| \leq 3\epsilon$.
Se $m > 1$, l'argomento precedente assicura che ogni componente ha una estensione continua a $\overline{A}$ e quindi $f$ si prolunga a tutto $\overline{A}$.

(**Teorema di Heine-Cantor**)

$$f \in C(K, Y), \quad K \subset X \quad \text{compatto} \quad \Rightarrow \quad f \text{ é uniformemente continua in } K.$$

**Prova 1** ($X = R^n$). Se no, $\exists\, \epsilon_0 > 0$, $u_n, v_n \in K$, $d(u_n, v_n) \leq \frac{1}{n}$ tale che $\rho(f(u_n), f(v_n)) \geq \epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \to u$, $v_n \to v$ per certi $u, v \in K$. Per continuitá: $\rho(f(u), f(v)) \geq \epsilon_0$. Ma $d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v_n) + d(v_n, v) \quad \forall n \Rightarrow u = v$, contraddizione.

**Prova 2** ($X = R^n$). Fissato $\epsilon > 0$, sia, per ogni $x$ in $K$,

$$\delta_\epsilon(x) := \sup\{\delta > 0 : \quad x', x'' \in B_\delta(x) \Rightarrow \rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon\}$$

La funzione $x \to \delta_\epsilon(x)$ é inferiormente semicontinua, perché, se $x_j \to x$,

$$B_{\delta_\epsilon(x) - d(x, x_j)}(x_j) \subset B_{\delta_\epsilon}(x) \Rightarrow \delta_\epsilon(x_j) \geq \delta_\epsilon(x) - d(x, x_j) \Rightarrow \liminf_j \delta_\epsilon(x_j) \geq \delta_\epsilon(x)$$

Per Weierstrass, esiste $\underline{x} \in K$ tale che $\delta_\epsilon(x) \geq \delta_\epsilon(\underline{x}) \quad \forall x \in K$. Dunque

$$d(x, y) < \delta_\epsilon(\underline{x}) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

**Prova 3.** Fissato $\epsilon > 0$ e $x \in K$, sia $\delta_\epsilon(x)$ tale che $x'$ , $x'' \in B_{\delta_\epsilon(x)}(x) \Rightarrow \rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$. Dalla compattezza di $K$ segue che esistono $x_j \in K$, $j = 1, \ldots, p$ tali che $K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}}(x_j)$. Sia $\delta_\epsilon := \min_j \delta_\epsilon(x_j)$ . Allora,

$$d(x,y) < \frac{\delta_\epsilon}{2},\ x \in B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}} \Rightarrow d(y,x_j) < \frac{\delta_\epsilon}{2} + \frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2} < \delta_\epsilon(x_j) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$$

## CONNESSIONE

$A \subset \mathbf{R}^n$ é **connesso** se $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ per due aperti $O_1, O_2$ tali che $A \cap O_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$, allora $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

$A \subset \mathbf{R}^n$ é **connesso per archi** se $\forall\, u, v \in A$, esiste un **cammino continuo** $\gamma \in C([0,1], A)$ tale che : $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$.

**Lemma**. $A$ connesso per archi $\Rightarrow$ $A$ connesso.

Siano $O_i, i = 1, 2$ aperti tali che $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ con $A \cap O_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$. Sia $\gamma$ cammino continuo in $A$, con $\gamma(0) \in O_1, \gamma(1) \in O_2$. Siccome, per continuitá, $\gamma(t) \in O_1$ se $t$ é vicino a $t = 0$, l'intervallo $I := \{t \in [0,1] : \gamma(\tau) \in O_1\ \forall \tau \in [0,t)\}$ é un intervallo non vuoto e $\bar{t} := \sup I < 1$. Siccome, sempre per continuitá, $\gamma(\bar{t}) \notin O_1$, si ha che $\gamma(\bar{t}) \in O_2$ e quindi, per continuitá, $\gamma(t) \in O_2$ per $t < \bar{t}$ vicino a $\bar{t}$. Dunque $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ e cioé $A$ é connesso.

**L'immagine continua di un connesso é un connesso**.

Sia $f : A \to Y$ continua. Se $A$ é connesso allora $f(A)$ 'e connesso.

Infatti, $f(A) = (f(A) \cap O_1) \cup (f(A) \cap O_2) \Rightarrow A = (f^{-1}(O_1) \cap A) \cup (f^{-1}(O_2) \cap A) \Rightarrow f^{-1}(O_1) \cap A \cap f^{-1}(O_2) \neq \emptyset \Rightarrow O_1 \cap A \cap O_2 \neq \emptyset$.

**Teorema del valore intermedio**.

$$A \subset \mathbf{R}^n, \quad A \quad \text{connesso per archi}, \quad f \in C(A, \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad f(A) \quad \text{é un intervallo}$$

Prova. Sia $a = f(u)$, $b = f(v)$, $u, v \in A$. Sia $\gamma \in C([0,1], A)$ con $\gamma(0) = u, \gamma(1) = v$. Siccome $t \to f(\gamma(t))$ é continua in $[0,1]$ si ha $[a,b] \subset f \circ \gamma([0,1])$ (teorema del valore intermedio per funzioni di una variabile!).

## COMPLEMENTI E ESERCIZI

1. Provare con un esempio che non é vero in generale che da ogni ricoprimento aperto si puó estrarre un sottoricoprimento misurabile.

Sia $X = l^\infty$ dotato della metrica $\|x\|_\infty := \sup_n |x(n)|$. Sia $E = 2^{\mathbf{N}} = \{\alpha : \mathbf{N} \to \{0,1\}$. Questo insieme é non numerabile. Siccome $\alpha \neq \beta \in l^\infty \Rightarrow \|\alpha - \beta\|_\infty = 1$, la famiglia (non numerabile) di aperti disgiunti $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$ é un ricoprimento di $E$ e, chiaramente, cessa di essere tale non appena si lasci da parte anche un solo $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$.

2. La **frontiera** di $E$ é l'insieme $\partial E := \{x : B_r(x) \cap E \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap E\}$.

3. $\partial E = \partial E'$ e $\overline{E} = E \cup \partial E$.

4. Se $O$ é aperto in $\mathbf{R}^n$ e $\gamma \in C([0,1], \mathbf{R}^n)$ tale che $\gamma(0) \in O$ e $\gamma(1) \notin O$, allora esiste $t \in (0,1)$ tale che $\gamma(t) \in \partial O$.

Infatti, $I := \{t \in [0,1] : \gamma(s) \in O \quad \forall s < t\}$ contiene, per continuitá, $t = 0$. Posto $\bar{t} := \sup I$, risulta $\gamma(\bar{t}) \in \partial O$. Intanto, $\gamma(\bar{t}) \notin O$ perché, altrimenti $\gamma(t) \in O$ per $t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ per un $\delta > 0$. Poi, $\gamma(t_n) \in O$ e $t_n < \bar{t}$ e quindi, se $t_n \to_n \bar{t}$, $\gamma(\bar{t}) \in \overline{O}$. Dunque $\gamma(\bar{t}) \in \overline{O} \setminus O = \partial O$.

5. Sia $f : E \to \mathbf{R}$. $f$ si dice *localmente costante in* $E$ se

$$\forall x \in E, \quad \exists B_r(x) \quad \text{tale che} \quad f \text{ é costante in } B_r(x) \cap E$$

Notiamo che una funzione siffatta é necessariamente continua in $E$.

6. **$f$ localmente costante in $E$ connesso per archi $\Rightarrow$ $f$ é costante in $E$.**
Prova. Sia, per ogni $x \in E$, $B_{r(x)}(x)$ tale che $f$ sia costante in $B_{r(x)}(x)$. Siano $x, y \in E$ e sia $\gamma$ cammino da $x$ a $y$. Notiamo che $(f \circ \gamma)([0,1])$ é un intervallo, perché $f \circ \gamma$ é continua. Estraendo da $\{B_{r(x)}(x) : \quad x \in \gamma([0,1])\}$, ricoprimento aperto del compatto $\gamma([0,1])$, un sottoricoprimento finito, deduciamo che $(f \circ \gamma)([0,1])$ é un insieme finito di punti, che, trattandosi di un intervallo, deve ridursi a un punto.

7. (i) $f \in C(E, \mathbf{R}^m)$ é $Lip_{loc}(E)$ se $\forall x \in E$, $\exists B_{r(x)}(x)$ tale che $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$.
(ii) $f \in Lip_{loc}(K)$, $K$ compatto $\Rightarrow$ $f \in Lip(K)$. Se no, $\exists x_j, y_j \in K$ : $\|f(x_j) - f(y_j)\| \; \|x_j - y_j\|^{-1} \to +\infty$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $x_j \to_j x \in K, y_j \to_j y \in K$. Siccome $f$ é limitata, necessariamente $\|x_j - y_j\| \to 0$ e quindi $x = y$. Ma $x_j, y_j \in B_{r(x)}(x)$ per $j$ grande e $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$, contraddizione.

**9.** Sia $p \geq 1$. Provare che $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ é una norma su $\mathbf{R}^n$.

**10.** Sia $\|\cdots\|$ una norma su $\mathbf{R}^n$. Provare che esistono costanti $C > c > 0$ tali che

$$c\|x\| \leq \|x\|_2 \leq C\|x\| \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

Da $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ segue

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|\, \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2$$

In particolare, ció assicura che $x \to \|\cdots\|$ é funzione continua in $\mathbf{R}^n$ (munito della norma $\|\cdots\|_2$) e quindi é dotata di minimo sul compatto $\{\|x\|_2 = 1\}$: esiste $\underline{x}$, con $\|\underline{x}\|_2 = 1$ tale che $\|x\| \geq \|\underline{x}\|$ se $\|x\|_2 = 1$ e quindi $\|\frac{x}{\|x\|_2}\| \geq \|\underline{x}\| \quad \forall x \neq 0$ e quindi $\|x\| \geq \|\underline{x}\|\, \|x\|_2 \quad \forall x$.

**10.** Mostrare, con un esempio, che non é vero in generale che ogni successione limitata in uno spazio normato ammette una estratta convergente.

Sia $E = l^2$ dotato della norma $\|\alpha\| = \left(\sum_{j=1}^\infty |\alpha(j)|2\right)^{\frac{1}{2}}$. Siano $e_j(i) := \delta_{ij}$. Allora $\|e_n - e_m\| = 2$ se $n \neq m$ e quindi $e_n$ non ha estratte convergenti, dato che nessuna sua sottosuccessione é di Cauchy (una successione $x_n$ in uno spazio metrico é di Cauchy se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon$ tale che $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ se $n, m \geq n_\epsilon$; ovviamente ogni successione convergente é di Cauchy).

**11.** Dati $\alpha,\ \beta > 0$, sia

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha\, |y|^\beta}{x^2 + y^2} \quad \text{se} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0$$

Provare che $f$ é continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha + \beta > 2$.

Se $\alpha + \beta - 2 \leq 0$, $f(tx,ty) = t^{\alpha+\beta-2} f(x,y)$ non va a zero al tendere di $t$ a zero (se $x^2 + y^2 \neq 0$) e quindi $f$ non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha + \beta - 2 > 0$.

Se $\alpha \geq 2$ é $f(x,y) \leq |x|^{\alpha-2}\, |y|^\beta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$. Analogamente se $\beta \geq 2$.

Resta da considerare il caso $\alpha,\ \beta < 2$. In tal caso, $\delta := \frac{\alpha+\beta-2}{2} \in (0, \frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\})$ e possiamo scrivere

$$f(x,y) = \frac{|x|^{\alpha-\delta}\, |y|^{\beta-\delta}}{x^2+y^2} \left(|x|^\delta\, |y|^\delta\right)$$

ove $\delta > 0$, $\alpha - \delta > 0$, $\beta - \delta > 0$, $\alpha + \beta - 2\delta = 2$. Dalla diseguaglianza di Holder, segue che, se $0 < r, s$, $r + s = 2$ allora (prendendo $p := \frac{2}{r}$, $q := \frac{2}{s}$ nella diseguaglianza di Holder)

$$|x|^r\,|y|^s \le \frac{r}{2}\,x^2 + \frac{s}{2}\,y^2 \le x^2 + y^2 \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

e quindi $|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta} \le x^2 + y^2$ e quindi $f(x,y) \le |x|^\delta\,|y|^\delta \to_{x^2+y^2 \to 0} 0$.