AM2 2010-11: Tracce delle lezioni- V Settimana

REGOLA DELLA CATENA

Siano $f : O \to \mathbf{R}^m$ differenziabile in $x \in O \subset \mathbf{R}^n$, $g : f(O) \to \mathbf{R}^p$ differenziabile in $f(x)$. Allora $g \circ f$ é differenziabile in x e

$$d(g \circ f)(x) \;=\; dg(f(x)) \circ df(x)$$

$$J_{g\circ f}(x) \;=\; J_g(f(x))\, J_f(x) \qquad\qquad \text{(prodotto righe per colonne)}$$

Prova. $\quad g\left(f(x+h)\right) = g\left(f(x) + df(x)h + \circ(\|h\|)\right) =$

$$g(f(x)) + dg(f(x))[df(x)h + \circ(\|h\|)] + \omega(df(x)h + \circ(\|h\|))$$

ove $\quad \|\omega(k)\| \le \epsilon\|k\| \quad$ se $\quad \|k\| \le \delta_\epsilon. \qquad$ Dunque

$$g(f(x+h)) \;=\; g(f(x)) \;+\; dg(f(x)) \circ df(x)h + \;\circ(\|h\|) + \omega(df(x)h + \circ(\|h\|))$$

Ma siccome $\|df(x)h + \circ(\|h\|)\| \;\le\; \delta_\epsilon$ se $\|h\| \;\le\; \delta'_\epsilon$, abbiamo che, per tali h, $\|\omega(df(x)h + \circ(\|h\|)\| \le \epsilon\|df(x)h + \circ(\|h\|)\| \le C\epsilon\|h\|$. Da qui la tesi.

L'affermazione sulle matrici Jacobiane segue dal fatto che la matrice rappresentativa del prodotto di matrici é il prodotto delle matrici rappresentative (vedi sotto).

NOTA. $\quad$ Se indichiamo con $\mathcal{A}_L$, $\mathcal{A}_U$ e $\mathcal{A}_{U\circ L}$ le matrici rappresentative di $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, di $U \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$ e di $U \circ L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, allora

$$\mathcal{A}_{U\circ L} \;=\; \mathcal{A}_U\, \mathcal{A}_L$$

(prodotto di matrici).

Infatti , indicate con $e_j, j = 1, \ldots, n$, $\hat{e}_i, i = 1, \ldots, m$, $\check{e}_l, l = 1, \ldots, p$ le basi (canoniche) in $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p$, si ha

$$\mathcal{A}_U \;=\; (< U(\hat{e}_i), \check{e}_l >)_{i=1,\ldots,m, l=1,\ldots,p} \qquad\qquad \mathcal{A}_L \;=\; (< Le_j, \hat{e}_i >)_{j=1,\ldots,n, i=1,\ldots,m}$$

$$\mathcal{A}_{U\circ L} \;= (< (U \circ L)(e_j), \check{e}_l >)_{j=1,\ldots,n; l=1,\ldots,p}$$

D'altra parte, $\qquad < (U \circ L)(e_j), \check{e}_l > \;\;=$

$$< U\left(\sum_{i=1}^{m} < L(e_j), \hat{e}_i > \hat{e}_i,\right) \check{e}_l > \;=\; \sum_{i=1}^{m} < Le_j, \hat{e}_i > < U(\hat{e}_i), \check{e}_l >$$

é l'elemento di posto lj della matrice prodotto

$$(< U(\hat{e}_i), \check{e}_l >)_{i=1,\ldots,m,l=1,\ldots,p} (< Le_j, \hat{e}_i >)_{j=1,\ldots,n,i=1,\ldots,m}$$

Un esempio: il gradiente in coordinate polari. Data $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, scriviamo f in coordinate polari: $g(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Allora,

$$g_\rho = f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta$$

$$g_\theta = -f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$

$$f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho\cos\theta - \frac{1}{\rho}g_\theta\sin\theta, \quad f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho\sin\theta + \frac{1}{\rho}g_\theta\cos\theta$$

$$|\nabla f|^2(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho^2(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2}g_\theta^2(\rho, \theta)$$

Corollario: derivazione lungo un cammino.

Siano $\quad \gamma \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n), \quad f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Allora

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) \;=< \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) >= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t)$$

Il TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$, $\;O\;$ aperto convesso in $\mathbf{R}^n$. Allora

$$|f(u) - f(v)| \;\le\; ||u - v|| \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Infatti $\quad |f(u) - f(v)| \;=\; |\int_0^1 [\frac{d}{dt}f(v + t(u - v))]\; dt| \;=$

$$|\int_0^1 < \nabla f(v + t(u - v)), u - v > dt| \;\le\; ||u - v|| \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Corollario 1 Sia $f \in C^1(O)$, $\;O\;$ aperto connesso. Allora

$$\nabla f(u) \;=\; 0 \;\forall u \in O \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{ cost. } \quad \text{in} \quad O$$

Prova. Il teorema del valor medio implica che f é costante sui dischi. In particolare, se $x_0 \in O$, $\{x \in O: \ f(x) = f(x_0)\}$ é aperto, al pari di $\{x \in O: \ f(x) \neq f(x_0)\}$. D'altra parte, $O = \{x \in O: \ f(x) = f(x_0)\} \cup \{x \in O: \ f(x) \neq f(x_0)\}$ e quindi siccome O é connesso, si ha allora che $\{x \in O: \ f(x) \neq f(x_0)\} = \emptyset$.

Corollario 2. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f é **localmente Lipschitziana** in O:

$$\forall \ \overline{B}_r(x_0) \subset O, \exists L = L(r, x_0): \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall \, x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Prova. Intanto, dal Teorema del valor medio

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \sup_{z \in \overline{B}_r(x_0)} \|\nabla f_i(z)\| \quad \|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Quindi, presi x, y in $\overline{B}_r(x_0)$, risulta

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(y)|^2 \leq \quad \|x - y\|^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\sup_{z \in B_r(x_0)} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) \right| \right]^2$$

Corollario 3. $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$ é Lipschitziana sui compatti di O :

$$\forall K \subset O \text{ compatto } \ \exists L = L(K): \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in K$$

Prova. Siccome $x, y \in K, \|x - y\| \geq r \quad \Rightarrow \quad \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \leq \frac{2}{r} \sup_{z \in K} \|f(z)\|$, basta provare che

$$\exists r > 0, \quad L > 0: \quad x', x'' \in K, \quad \|x' - x''\| \leq r \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|$$

Dalla compattezza di K segue che

$$\exists x_j \in K, \ r_j > 0, \ j = 1, \ldots, p \quad \text{tali che} \quad \overline{B}_{r_j}(x_j) \subset O \quad \text{e} \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{\frac{r_j}{2}}(x_j).$$

Per quanto sopra,

$$\exists L_j > 0: \quad x', x'' \in K \cap \overline{B}_{r_j}(x_j) \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \leq L_j\|x' - x''\|$$

Sia $0 < r \leq r_j \forall j$, $L := maxL_j$. Se $x', x'' \in K, \|x' - x''\| \leq \frac{r}{2}$ e, diciamo, $x' \in B_{\frac{r_j}{2}}(x_j)$ si ha quindi che

$$\|x'' - x_j\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r_j}{2} \leq r_j \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|$$

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$, $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Se f_{x_j} sono a loro volta derivabili, allora

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

sono le derivate seconde.

Se $f_{x_i x_j} \in C(O)$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, f si dice di classe $C^2(O)$.

LEMMA DI SCHWARTZ

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall i, j = 1, \ldots, n, \quad \forall x \in O$$

Prova. Sia, per semplicitá, $n = 2, (0,0) \in O$. Per $\delta > 0$ piccolo, sia:

$$I_\delta := \int_0^\delta \left(\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^\delta [\frac{\partial f}{\partial x}(x,\delta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)]\, dx =$$

$$[f(\delta,\delta) - f(0,\delta) - f(\delta,0) + f(0,0)] =$$

$$\int_0^\delta [\frac{\partial f}{\partial y}(\delta,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)]\, dy = \int_0^\delta \left(\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx \right) dy$$

Siccome $x \to \int_0^\delta f_{yx}(x,y)\, dy$ é continua, per il teorema della media

$$\exists x_\delta \in [0,\delta] : \quad I_\delta = \int_0^\delta \left(\int_0^\delta f_{yx}(x,y)\, dy \right) dx = \delta \left(\int_0^\delta f_{yx}(x_\delta, y)\, dy \right)$$

Ancora dal teorema della media: $\exists y_\delta \in [0,\delta] : \quad I_\delta = \delta^2 f_{yx}(x_\delta, y_\delta)$ e quindi

$$\frac{I_\delta}{\delta^2} \to_{\delta \to 0} f_{yx}(0,0)$$

Analogamente,

$$\exists (x^\delta, y^\delta) \in [0,\delta] \times [0,\delta] : \quad \frac{I_\delta}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} \int_0^\delta \left(\int_0^\delta f_{xy}(x,y)\, dy \right) dx = f_{xy}(x^\delta, y^\delta) \to_\delta f_{xy}(0,0)$$