AM210: Tracce delle lezioni- XI Settimana

IL PROBLEMA DI CAUCHY

Sia $f \in C(O, \mathbf{R}^n)$, $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Trovare, se esistono, $\delta > 0$, e una funzione $\gamma \in C^1((-\delta, \delta), O)$ tali che

$$\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma(0) = x \qquad (*)$$

NOMENCLATURA. L'equazione $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ é infatti un **sistema di n equazioni differenziali** nelle n (funzioni) incognite $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$:

$$\dot{\gamma}_i(t) = f_i(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma_i(0) = x_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

La condizione $\gamma(0) = x$ si chiama **condizione iniziale**.

La funzione data f si chiama anche **campo di vettori** in O (i vettori $f(x)$ applicati nei punti $x \in O$). Una soluzione γ é una *curva tangente in ogni suo punto al campo di vettori* f e si chiama anche **curva integrale** del campo. Al variare della condizione iniziale x in O si otterrá una famiglia di curve $\gamma^x(t)$ che si chiamerá **flusso** generato dal campo f.

Dal punto di vista dinamico, f é un **campo di velocitá** e $\gamma(t)$ é, al variare di t, la **traiettoria** di un punto mobile la cui velocitá all'istante t é data da $f(\gamma(t))$ e che si trova nell'istante iniziale $t = 0$ nella posizione iniziale x.

Una formulazione equivalente del Problema di Cauchy: esistenza di un punto fisso per un operatore integrale

Se $\gamma \in C^1(-\delta, \delta), O)$ é soluzione del Problema di Cauchy $(*)$, allora, per il TFC, $\gamma_i(t) = x + \int\limits_0^t f_i(\gamma(\tau))d\tau$, ovvero, con notazione vettoriale,

$$\gamma(t) = x + \int\limits_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in (-\delta, \delta) \qquad (**)$$

ove, se $x \in C([a, b], \mathbf{R}^n)$, intendiamo che $\int\limits_a^b x(t)dt := (\int\limits_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int\limits_a^b x_n(t)dt)$.
Viceversa, se $\gamma \in C(-\delta, \delta), O)$ risolve *l'equazione integrale* $(**)$, allora , di nuovo per il TFC, $\gamma \in C^1(-\delta, \delta), O)$ e soddisfa $(*)$.
Vediamo ora come $(**)$ si riscriva come *equazione di punto fisso per un opportuno operatore integrale.* Sia $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$, cosicché , se $x \in B_r(x_0)$, allora

$$\|\gamma(t) - x\| \leq r \quad \forall t \in [-\delta, \delta] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x_0\| \leq 2r \quad \forall t \in [-\delta, \delta]$$

Posto

$$M := \sup_{\xi \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(\xi)\|$$

eventualmente rimpicciolendo δ, possiamo supporre che $\delta M < r$ e quindi

$$\gamma([-\delta,\delta]) \subset \overline{B}_r(x) \Rightarrow x + \int\limits_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \in \overline{B}_{2r}(x_0) \quad \forall t \in [-\delta,\delta]$$

Ció segue dalla diseguaglianza $\quad \|\int\limits_a^b x(t)dt\|^2 = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \left(\int\limits_a^b x_i(t)dt\right) x_i(t)\right] dt \leq$

$$\int_a^b \left[\|x(t)\| \, \|\int\limits_a^b x(t)dt\|\right] dt = \|\int\limits_a^b x(t)dt\| \int_a^b \|x(t)\|dt \qquad \text{ovvero}$$

$$\|\int\limits_a^b x(t)dt\| \leq \int_a^b \|x(t)\|dt$$

Con tale scelta di δ, e per ogni fissato $x \in B_r(x)$ la formula

$$(T^x\gamma)(t) := x + \int\limits_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in [-\delta,\delta]$$

definisce un *operatore integrale* T^x che trasforma $\gamma \in C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ in $T^x\gamma \in C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ cioé T^x *manda lo spazio metrico completo* $C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ *in se*: γ **soddisfa** $(**)$ **se e solo se** γ **é un punto fisso di** T^x.

PROBLEMA DI CAUCHY: esistenza ed unicitá locale

TEOREMA (di Picard)

Sia $f \in Lip_{loc}(O)$, *O aperto in* $\mathbf{R}^n$. *Sia* $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$. *Siano*

$$M := \sup_{x \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(x)\|, \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\| \quad \forall x,y \in \overline{B}_{2r}(x_0)$$

Sia $\delta > 0$ *tale che* $\delta k < 1$, $\delta M < r$. *Allora: per ogni* $x \in B_r(x_0)$,

$\exists! \gamma^x \in C^1((-\delta,\delta),B_{2r}(x_0))$ *tale che* $\gamma^x(0) = x$, $\dot\gamma^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in (\delta,\delta)$

Inoltre, γ^x *dipende in modo continuo da* x*:*

$$\|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty = \sup_{t\in[-\delta,\delta]} \|\gamma^x(t) - \gamma^y(t)\| \leq \frac{1}{1-\delta k} \|x-y\| \qquad \forall x,y \in B_r(x_0)$$

Prova. Ricordiamo che lo spazio vettoriale $C([-\delta,\delta],\mathbf{R}^n)$, munito della norma $\|\gamma\|_\infty = \sup\limits_{t\in[-\delta,\delta]} \|\gamma(t)\|$, é un Banach, e quindi

$$X := \{\gamma \in C([-\delta,\delta],\mathbf{R}^n) : \quad \|\gamma(t) - x\| \le r \qquad \forall t \in [-\delta,\delta]\}$$

é spazio metrico completo (rispetto alla metrica indotta). Ora, fissato $x \in B_r(x_0)$,

$$\gamma \in X \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x\| \le r \quad \forall t \in [-\delta,\delta] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x_0\| \le 2r \quad \forall t \in [-\delta,\delta]$$

Dunque, $\forall \gamma \in X$, é definita la funzione $f(\gamma(t)), \quad t \in [-\delta,\delta]$ e quindi lo é la funzione

$$T^x\gamma : t \to x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau, \qquad t \in [-\delta,\delta]$$

Chiaramente $\quad T^x\gamma \in C([-\delta,\delta],\mathbf{R}^n) \quad \forall \gamma \in X$. $\quad$ Inoltre, $\quad \gamma \in X \quad \Rightarrow$

$$\|(T^x\gamma)(t) - x\| = \|\int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau\| \le \left|\int_0^t \|f(\gamma(\tau))\|d\tau\right| \le \delta M < r \quad \Rightarrow \quad T\gamma \in X$$

Infine, $\quad \gamma,\beta \in X \quad \Rightarrow \qquad \|T^x\gamma - T^x\beta\|_\infty \le \sup\limits_{t\in[-\delta,\delta]} \|\int_0^t [f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))]\, d\tau\| \le$

$$\le \sup_{t\in[-\delta,\delta]} \left|\int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\|d\tau\right| \le \sup_{t\in[-\delta,\delta]} \left|\int_0^t k\|\gamma(\tau) - \beta(\tau)\|d\tau\right| \le k\delta\|\gamma - \beta\|_\infty$$

perché f é Lipschitziana di costante k in $\overline{B}_{2r}(x_0)$. $\qquad$ Siccome $\quad \delta k < 1$,
T^x é una contrazione di $\quad X \quad$ in sé e quindi, per il Teorema delle contrazioni

$$\exists\, !\gamma^x \in X : \qquad T^x\gamma^x = \gamma^x. \qquad\qquad \text{Notiamo che} \quad (T\gamma^x)(0) = x.$$

Dunque, γ^x é l'unica soluzione, definita in $[-\delta,\delta]$, del problema di Cauchy

$$\dot\gamma^x(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta,\delta), \qquad \gamma^x(0) = x$$

Infine, $\qquad \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \le \|x - y\| + \sup\limits_{t\in[-\delta,\delta]} \left|\int_0^t \|f(\gamma^x(\tau)) - f(\gamma^y(\tau))\|d\tau\right| \le$

$$\|x - y\| + \delta k\|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \le \frac{1}{1-\delta k}\|x - y\| \qquad \forall x, y \in B_r(x_0)$$

PROBLEMA DI CAUCHY: Unicitá globale, soluzione massimale.

Proposizione 1. *Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^n)$, O aperto in $\mathbf{R}^n$. Siano $\gamma \in C^1((a,b))$ e $\beta \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b}))$ soluzioni dello stesso problema di Cauchy*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

Se $(a,b) \subset (\tilde{a}, \tilde{b})$, allora $\gamma \equiv \beta$ in (a,b): β é un prolungamento della soluzione γ.

Prova. Per il Teorema di Picard, esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma \equiv \beta$ in $|t| \leq \delta$. Quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau), \, \forall \tau \in [0,t]\}$$

é ben definito e maggiore o uguale a δ. Si tratta di mostrare che $\bar{t} = b$. Sia per assurdo $\bar{t} < b$. Per continuitá, é allora anche $\gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$ e inoltre $\gamma(t), \beta(t)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale in $(0, \bar{t}]$. Dunque γ, β sono entrambe soluzioni del medesimo problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$$

e quindi coincidono anche in $[\bar{t}, \bar{t} + \sigma]$ per un $\sigma > 0$ piccolo, e quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau), \, \forall \tau \in [0,t]\} \geq \bar{t} + \sigma$$

contraddizione. Dunque $\gamma \equiv \beta$ in $[0, b)$ e, analogamente, $\gamma \equiv \beta$ in $(a, 0]$).

Una soluzione non prolungabile si chiama **soluzione massimale**. La soluzione massimale é evidentemente unica ed il suo intervallo di definizione si chiama **intervallo massimale di esistenza** e si indica $(t^-(x_0), t^+(x_0))$, o semplicemente, se non vi é ambiguitá, (t^-, t^+).

Se $t^-(x_0) = -\infty$, $t^+(x_0) = +\infty$, diremo che il Problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$ ammette **soluzione globale** o per tutti i tempi.

ESEMPI.

Il problema di Cauchy $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0$ ha come soluzione massimale $x(t) = x_0 e^t$, $t \in \mathbf{R}$

mentre il problema $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$ ha come soluzione massimale $x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}$, $t \in (-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Proposizione 2. *Sia* $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0, T)$. *Allora*

$$M := \sup_{t \in [0,T)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \gamma \text{ é prolungabile oltre } \quad T$$

Dunque, $\sup\limits_{t \in (t^-, t^+)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$ *(ad es. se* γ *é limitata)* $\Rightarrow t^- = -\infty, t^+ = +\infty$.

Prova. É $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \| \int\limits_s^t f(\gamma(\tau)) d\tau \| \leq M|t - s| \quad \forall s, t \in [0, T)$ e quindi γ é uniformemente continua in $[0, T)$. Ne deriva che

$$\exists \quad \gamma(T) := \lim_{t \to T^-} \gamma(t) \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(T) = f(\gamma(T))$$

Detta allora $\hat{\gamma}$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $\hat{\gamma}(T) = \gamma(T)$, la funzione uguale a γ in $[0, T)$ ed uguale a $\hat{\gamma}$ in $[T, T + \delta]$ é di classe C^1 ed é soluzione del sistema differenziale in $[0, T + \delta]$.

Corollario 1. *Sia* $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *tale che*

(i) $\{x : g(x) \leq g(x_0)\}$ é limitato $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ $\qquad (ii)$ $< \nabla g(x), f(x) > \ \leq 0 \quad \forall x$

Allora le soluzioni del sistema $\dot{x} = f(x)$ *sono definite per tutti i tempi positivi.*

Infatti, $\frac{d}{dt} g(x(t)) \ = < \nabla g(x(t)), \dot{x} > = < \nabla g(x(t)), f(x(t)) > \ \leq \ 0 \quad \forall t$ e quindi la traiettoria $x(t)$ si mantiene, per tutti i tempi positivi, nella regione limitata $\{g(x) \leq g(x_0)\}$ e quindi $t^+ = +\infty$.

Corollario 2. *Data* $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, *siano* $g^M := \{x : \ g(x) \leq M\}$ *e* $\Sigma^M := \{x : \ g(x) = M\}$. *Se*

(i) $g^M := \{x : g(x) \leq M\}$ é limitato $\qquad (ii)$ $< \nabla g(x), f(x) > \ < 0 \quad \forall x \in \Sigma^M$

allora la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x} = f(x) \quad x(0) = x_0$ *con* $g(x_0) \leq M$ *é definita per tutti i tempi positivi.*

Infatti $g(x(t)) \leq M \quad \forall t \in [0, t^+(x_0))$, giacché, se no, é ben definito

$T := \inf\{t > 0 : \quad g(x(t)) \geq M\}$ e quindi $\quad g(x(t)) \leq M \forall t \leq T$ e $g(x(T)) = M$

Ma questo é assurdo perché, se $t < T$, $T - t$ piccolo, allora

$$(g \circ x)'(T) \ = < \nabla g(x(T)), x'(T) > = < \nabla g(x(T)), f(x(T)) > \ < \ 0 \quad \Rightarrow$$

$$g(x(t)) = g(x(T)) + (t - T) \left[< \nabla g(x(T)), f(x(T)) > + \circ(1) \right] \quad > \quad g(x(T)) = M$$

Esempio 1. Le soluzioni del sistema $\dot{x} = -x^3y^2 \quad \dot{y} = -2y^3x^2$ sono definite per tutti i tempi positivi: basta prendere $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ per ottenere

$$\frac{d}{dt}g(x(t),y(t)) = \frac{d}{dt}(\frac{x^2+y^2}{2}) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^4y^2 - 2y^4x^2 \leq 0 \qquad \forall t$$

Invece, $t^- > -\infty$ quale che sia la condizione iniziale. Questo si puó vedere cosi':

$$\frac{d}{dt}[x(t)^2y(t)^2] = 2xy^2\dot{x} + 2yx^2\dot{y} = -2xy^2(x^3y^2) - 2yx^2(2y^3x^2) = -6(x^2y^2)^2$$

cioé $z(t) := x(t)^2y(t)^2$ risolve $\dot{z} = -6z^2$ e quindi $\quad z(t) = \frac{z(0)}{1+6z(0)t} \quad t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$. Siccome $\quad z(0) = x(0)^2y(0)^2 \quad$ e

$$\dot{x} = -x(x^2y^2) = -x\frac{z(0)}{1+6z(0)t} \qquad\qquad \dot{y} = -2y(x^2y^2) = -2y\frac{z(0)}{1+6z(0)t}$$

troviamo $\quad \log\frac{x(t)}{x(0)} = -\int\limits_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s}ds, \qquad \log\frac{y(t)}{y(0)} = -2\int\limits_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s}ds, \quad$ ovvero

$$x(t) = \frac{x(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{6}}} \qquad y(t) = \frac{y(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{3}}} \qquad t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$$

Nota anche che $\quad \frac{\dot{y}}{y} = -2x^2y^2 = 2\frac{\dot{x}}{x} \quad \Rightarrow \log\frac{y(t)}{y(0)} = 2\log\frac{x(t)}{x(0)} \Rightarrow \quad y(t) = \frac{y(0)}{x(0)^2}x(t)^2$.

Sistemi gradiente: $\dot{x} = -\nabla F(x) \qquad F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Per applicare i Corollari, basta prendere $g = F$: $\quad < \nabla g(x), f(x) > \quad = -\|\nabla F\|^2$ e dedurre che se $\quad \{x \in \mathbf{R}^n : \quad F(x) \leq F(x_0)\} \quad$ é limitato per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$, allora le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi. In effetti si puó dire di piú:

se F é inferiormente limitata le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi.

Infatti, $\quad \int_0^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau = -\int_0^t (F(x(\tau)))'\, d\tau = F(x(0)) - F(x(t)) \leq F(x(0)) - \inf F \Rightarrow \|x(t) - x(s)\| = \|\int_s^t \dot{x}(\tau)d\tau\| \leq \int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|d\tau \leq |t-s|^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq |t-s|^{\frac{1}{2}} (F(x(0)) - \inf F)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall s < t$ e quindi $x(t)$ é uniformemente continua. Si conclude come nella dimostrazione della Proposizione 2.

Esempio 2. Le soluzioni di $\quad \dot{x} = xy^2(x^2+y^2) \qquad \dot{y} = -yx^4(x^2+y^2)$ sono definite $\forall t$: $\quad \frac{d}{dt}(\frac{x^4}{2} + y^2) = 2x^3\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x^4y^2(x^2+y^2) - 2y^2x^4(x^2+y^2) \equiv 0$ e quindi $\quad$ *g é costante lungo le traiettorie*, $\quad$ ovvero le traiettorie sono contenute negli insiemi di livello di g, che sono visibilmente limitati.