AM210: Tracce delle lezioni- X Settimana

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Equazioni differenziali lineari del I ordine

Date le funzioni $a(x), b(x)$ continue in (a, b) determinare, se esistono, le funzioni $y = y(x)$ di classe $C^1((a, b))$ tali che

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b) \qquad \textbf{(ED)}$$

(ED) si chiama equazione differenziale nella funzione incognita $y = y(x)$.
Tale equazione é **lineare** perché l'operatore

$$\mathcal{D} : C^1((a, b)) \to C((a, b)), \qquad (\mathcal{D}y)(x) := y'(x) + a(x)y(x)$$

é **lineare**, cioé $\quad \mathcal{D}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{D}y_1 + \alpha_2 \mathcal{D}y_2$. Si dice **del primo ordine** perché nell'equazione compare solo la *derivata prima.*
Tale equazione, se ha soluzione, ne ha infinite . Fissato peró $x_0 \in (a, b)$ (**'punto iniziale'**) e y_0 (**'valore iniziale'**), il problema

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

consistente nel trovare una soluzione di (ED) soddisfacente la **condizione iniziale, o di Cauchy** $y(x_0) = y_0$ ha, come vedremo, una sola soluzione. Tale problema viene chiamato **problema di Cauchy** associato ad (ED).

ESEMPIO. Se $a \equiv 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = b$ sono le primitive di b. Siccome b **é supposta continua**, le soluzioni di questa equazione sono date, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC), da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)dt$$

ove $x_0 \in (a, b)$ é un punto fissato e y_0 é una costante arbitraria ; si tratta in effetti di una famiglia a un parametro di soluzioni, giacché, se si cambia il 'punto iniziale' x_0 la famiglia di funzioni non cambia.
Tale formula dice che, fissato il 'punto iniziale' x_0, c'é una unica soluzione dell'equazione differenziale data che prende in x_0 il valore y_0, cioé

il Problema di Cauchy (PC) ha una ed una sola soluzione.

Condizione perché $b(x)$ abbia primitiva é che b abbia la proprietá del valore intermedio (Teorema di Darboux). In particolare, **la continuitá di $b(x)$ é essenziale** .

Soluzione del Problema di Cauchy associato a (ED).

Se y é soluzione di (PC), moltiplicando (ED) per $e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$, troviamo che

$$\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\right)' = [y'(x) + a(x)y(x)]e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}b(x)$$

e quindi, per il TFC, $\quad y(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds}b(t)dt \quad$ e quindi

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds}b(t)dt\right]$$

Tale espressione, che fornisce al variare del parametro y_0 tutte le soluzioni di (ED), si chiama **Integrale generale** di (ED).

Equazioni differenziali autonome del I ordine:
equilibri, esistenza, unicitá, tempo di esistenza.

Sia $f \in C((a,b))$. Trovare $x \in C^1(I)$, I intervallo opportuno, tale che

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in I \qquad \textbf{(EDA)}$$

Tale equazione differenziale del primo ordine si chiama **autonoma** in quanto la variabile indipendente (qui indicata come t) non compare esplicitamente nell'equazione. Una particolare conseguenza di questo fatto é che

se $x(t), t \in (\alpha, \beta)$ é soluzione, allora anche $x(t - t_0), t \in (\alpha + t_0, \beta + t_0)$ é soluzione.

Per questa ragione la condizione di Cauchy si scrive nella forma $x(0) = x_0$.
Interpretazione 'dinamica' del Problema di Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

$x(t)$ é la posizione di un punto mobile (su $\mathbf{R}$) che si trovi al tempo 'iniziale' $t = 0$ nella posizione x_0 e che si muova, in ogni istante t, con velocitá data da $f(x(t))$ (la velocitá al tempo t dipende, mediante la 'legge' f, dalla posizione al tempo t): il *campo delle velocitá* prescritte f determina, data la posizione iniziale, la posizione futura (e passata).

1. Equilibri *(ovvero gli zeri del campo delle velocitá)*.
Se $f(x_0) = 0$, una soluzione é data dalla funzione $x(t) \equiv x_0$. Siccome il 'punto mobile' $x(t)$ non si muove da x_0, la posizione x_0 si dice di **equilibrio**.

2. Esistenza e unicitá locale se $f(x_0) \neq 0$.
Determinazione di una soluzione di (PC). Sia $f(x_0) > 0$ ed (a,b) il piú grande intervallo contenente x_0 su cui $f(x) > 0$. É allora definita la funzione

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}, \qquad x \in (a,b)$$

Da $F'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0 \quad \forall x \in (a,b)$, segue che F é invertibile in (a,b). Ora, se $x(t)$ é soluzione di (PC), allora $\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} \equiv 1$, e quindi, integrando tra 0 e t,

$$F(x(t)) = t \quad \text{ovvero} \quad x(t) = F^{-1}(t) \qquad \forall t \in (F(a), F(b)).$$ Siccome

$$\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t)) \quad \forall t \in (F(a), F(b)) \qquad \text{e} \qquad F^{-1}(0) = x_0$$

(PC) ha una e una sola soluzione in $(F(a), F(b))$ **data da** $\quad x(t) = F^{-1}(t)$.

3. Tempi di esistenza.
Siano (a,b) ed F come sopra, e quindi il problema di Cauchy

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

ha, nell'intervallo $\quad (-\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)}, \int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)}) \quad$ una ed una sola soluzione data da

$$x(t) = F^{-1}(t) \qquad t \in (-\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)}, \int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)})$$

Se $\int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)} = +\infty$, **la soluzione é definita per tutti i tempi positivi**. In tal caso si dice che la soluzione **esiste globalmente (nel futuro)**.
Notiamo che, se $b = +\infty$, ció accade se f é limitata o diverge, a $+\infty$, lentamente.
Se invece $b < +\infty$, e quindi b é un equilibrio, ció accade se f ha uno zero del primo ordine in b (ad esempio se f é Lipschitziana attorno a b).
Notiamo che in tal caso $x(t) = F^{-1}(t) \to_{t\to+\infty} b$: il punto mobile $x(t)$ va all'infinito se non ci sono equilibri a destra di x_0, mentre, se $b < +\infty$, tende all'equilibrio b.
Considerazioni analoghe se $\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)} = -\infty$. Se $\int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)} = +\infty = -\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)}$ diremo che la soluzione **esiste globalmente**.
Se invece $\int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)} < +\infty$ (e $b = +\infty$) e quindi la soluzione non é definita per tutti i tempi si dice che la soluzione **esplode** (nel futuro) **in tempo finito**; ci sará

esplosione in tempo finito nel passato se $\int_{x_0}^{a} \frac{ds}{f(s)} > -\infty$ (e $a = -\infty$).

Ad esempio, per le seguenti equazioni differenziali

$$(i)\ x' = e^x \qquad (ii)\ : x' = e^{-x}, \qquad (iii)\ x' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (iv)\ \dot{x} = \cosh^2 x$$

soggette alla condizione iniziale $x(0) = 0$ si ha

(i) $F(x) = 1 - e^{-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = -\log(1-t)$ é definita in $(-\infty, 1)$

(ii) $F(x) = e^x - 1$ e quindi la soluzione $x(t) = \log(t+1)$ é definita in $(-1, +\infty)$

(iii) $F(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1+s^2}\, ds = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})}{2} \rightarrow_{x\to\pm\infty} \pm\infty$ e quindi la soluzione é definita per tutti i tempi .

(iv) $F(x) = \int\limits_{x_0}^x \frac{ds}{\cosh^2 s} = \tanh x - \tanh x_0$ e quindi la soluzione é definita in $(-1 - \tanh x_0, 1 - \tanh x_0)$. Questo mostra in particolare che *l'intervallo di esistenza dipende dalla posizione iniziale* x_0.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Se $a < b$ sono due zeri consecutivi di f e $x_0 \in (a, b)$ allora la soluzione di $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ é definita per tutti i tempi perché gli integrali $\int_{x_0}^{a} \frac{ds}{f(s)}$ e $\int_{x_0}^{b} \frac{ds}{f(s)}$ divergono entrambi. Ad esempio, nei seguenti problemi

$$(i)\quad x' = \frac{1}{2}(1-x^2), \quad x(0) = 0, \qquad (ii)\quad x' = \frac{1}{2}(1-x^2), \quad x(0) = 2$$

(i) $F(x) = \int\limits_0^x \frac{2ds}{1-s^2} = \int\limits_0^x \left[\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right] ds = \log\frac{1+x}{1-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = \frac{e^t-1}{e^t+1}$ é definita su tutto $\mathbf{R}$

(ii) $F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_2^x \frac{ds}{1-s^2} = \log\frac{1}{3}\frac{x+1}{x-1}$ e quindi la soluzione $x(t) = \frac{3e^t+1}{3e^t-1}$ é definita (e decrescente) in $(-\log 3, +\infty)$.

4. Unicitá/non unicitá locale. Sia x_0 un equilibrio. La soluzione costante,

$$x(t) = x_0 \quad \forall t, \qquad \textit{non é in generale l'unica soluzione:}$$

se x_0 é uno zero isolato di f e l'integrale $\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}$ esiste in senso generalizzato (e questo accade se f ha in x_0 uno zero di ordine $\delta \in (0,1)$) allora la formula al punto

1 continua a fornire una soluzione (non costante) di (PC). E in effetti ci sono infinite soluzioni di (PC). Vediamolo con un esempio:

$$\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = 0$$

ha le **infinite soluzioni** $\quad x(t) = (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}, \quad t_0 \geq 0.$

5. Non unicitá per tempi grandi. L'esempio precedente mostra anche come, pur in presenza di una unica soluzione locale (cioé 'per tempi piccoli') l'unicitá puó venire a mancare globalmente (cioé 'per tempi grandi'). Consideriamo i problemi

$$(i) \quad \dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = -1 \qquad (ii) \quad \dot{x} = \sqrt{|1 - x^2|}, \quad x(0) = 0$$

(i) Qui, con le notazioni usate al punto 1, $\quad f(x) = x^{\frac{2}{3}},$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} + 3, \quad x \in (-\infty, 0), \quad F(-\infty) = -\infty, \quad F(0) = 3$$

Il problema dato ha ha come *unica soluzione in* $(-\infty, 3)$ la funzione

$$x(t) := F^{-1}(t) = (\frac{t-3}{3})^3, \qquad (-\infty, 3)$$

Tale soluzione puó peró essere prolungata su tutto $\mathbf{R}$ cosi:

$$\forall t_0 \geq 3: \qquad x(t, t_0) := (\frac{t-3}{3})^3 \chi_{(-\infty,3)} + (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}$$

Con verifica diretta: queste sono tutte soluzioni del problema di Cauchy dato.

(ii) É , per $x \in (-1, 1)$, $\quad F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin x.$

Dunque $\quad x = \sin t \quad$ é l'unica soluzione soluzione in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\quad$ Poi

$$F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{|1-s^2|}} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{\pi}{2} + \cosh^{-1}(x) \qquad \text{se } x \geq 1. \qquad \text{Quindi}$$

$x(t) = \cosh(t - \frac{\pi}{2}), \quad t \geq \frac{\pi}{2} \quad$ é soluzione dell'equazione differenziale. $\quad$ Siccome

$\chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \sin t : + \chi_{(\frac{\pi}{2},+\infty)} \cosh(t - \frac{\pi}{2}) \quad t \geq \frac{\pi}{2} \quad$ é di classe C^1 e vale zero per $t = 0$

concludiamo che questa funzione é soluzione del problema.
E una verifica diretta mostra che, quale che siano $T, R > 1$, le funzioni

$$-\chi_{(-\infty,-R)} \cosh(t-R) + \chi_{[-R,-\frac{\pi}{2}} + \chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \sin t + \chi_{(\frac{\pi}{2},T]} + \chi_{(T,+\infty)} \cosh(t-T) \quad t \in \mathbf{R}$$

sono tutte soluzioni del problema.