AM2: Tracce delle lezioni- I Settimana

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Sia $n \in \mathbf{N}$. Una *funzione reale di n variabili reali* é una funzione

$$f : A \to \mathbf{R}, \qquad A \subset \mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R} \quad n \quad volte$$

Il *grafico* di f é $\mathcal{G}_f := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : \quad x \in A\}$.
Gli elementi di $\mathbf{R}^n$, detti anche **punti o vettori** di $\mathbf{R}^n$, si denotano come $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e gli 'scalari' x_j si dicono componenti o coordinate di x. I vettori di $\mathbf{R}^2$ ed $\mathbf{R}^3$ si scrivono anche (x, y), (x, y, z).
Primi esempi di funzioni di piú variabili:
1. $f(x, y) = ax + by$, funzione *lineare* di due variabili, ha come grafico il piano (nello spazio ordinario) di equazione $z = ax + by$. Piú in generale

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \quad = \quad \sum_{j=1}^n a_jx_j \qquad (\textbf{funzione lineare})$$

ha per grafico un 'iperpiano' in R^{n+1} passante per l'origine $0 := (0, \ldots, 0)$.
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$. $\mathcal{G}_f$ é la superfice (nello spazio cartesiano $Oxyz$) ottenuta ruotando attorno all'asse Oz la parabola nel piano Oxz di equazione $z = x^2$.
I polinomi in n variabili. Dato $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ e $x \in \mathbf{R}^n$, scriveremo $x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Un polinomio di grado p nelle x_i si scrive

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \le p} c_\alpha x^\alpha$$

Una funzione *vettoriale (o a valori vettoriali)* di n variabili reali é una funzione

$$f : A \to \mathbf{R}^m, \quad A \subset \mathbf{R}^n, m \ge 2 \qquad f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Le f_j si chiamano le (funzioni) componenti di f.
Se $n = 1$, f si dice anche *curva parametrica o cammino* in $\mathbf{R}^m$.
Ad esempio, dato $x \in \mathbf{R}^m$, $f(t) := tx$ é funzione (lineare) su $\mathbf{R}$ a valori in $\mathbf{R}^m$; la sua immagine $\Im f = \{tx : t \in \mathbf{R}\}$ é la retta in $\mathbf{R}^m$ passante per l'origine e per x (sottospazio lineare *generato* da x).
Un altro esempio: fissato $r > 0$, $f : \theta \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $t \in [0, 2\pi)$ é (nel piano) la circonferenza di centro l'origine e raggio r (in forma parametrica).
Piú in generale, una $f : A \to \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^k$ é *k-superfice* (parametrica) in $\mathbf{R}^n$. Ad esempio,

$$f : (\theta, \varphi) \to (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi), \qquad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

é sfera (parametrica) di centro l'origine e raggio R in $\mathbf{R}^3$.

STRUTTURA ALGEBRICA e STRUTTURA METRICA in $\mathbf{R}^n$

Ricordiamo che un insieme V si dice **spazio vettoriale (o lineare)** su $\mathbf{R}$ se sono definite

$$\textit{una operazione di addizione} \qquad V \times V \to V, \quad (u,v) \to u+v$$

$$\textit{una moltiplicazione per scalari} \qquad \mathbf{R} \times V \to V, \quad (t,v) \to tv$$

tali che $(V,+)$ sia gruppo commutativo e

$$(t+s)u = tu+su, \quad t(u+v) = tu+tv, \quad t(sv) = (ts)v, \quad 1v = v \qquad \forall u,v \in V, \quad s,t \in \mathbf{R}$$

Gli elementi di uno spazio vettoriale si chiamano punti o **vettori**.

Chiaramente, $\mathbf{R}^n$, dotato delle operazioni

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) := (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n), \qquad t(x_1,\dots,x_n) := (tx_1,\dots,tx_n)$$

é spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.

Interpretazione geometrica. Come noto, $\mathbf{R}^2$ si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy. In tale piano, dato $v \in \mathbf{R}^2$, l'insieme

$$\mathbf{R}\, v := \{tv : \ t \in \mathbf{R}\}$$

é l'insieme dei punti della retta uscente dall'origine $O := (0,0)$ e passante per v; $\{tv+u : \ t \in \mathbf{R}\}$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per u e parallela alla retta $\mathbf{R}\, v$.

In particolare, $u+v$ é il punto comune alle rette $\{tu+v : \ t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u+tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama traslazione di u lungo v. Tale interpretazione geometrica si estende al caso generale $n > 2$.

Altri esempi

$\mathbf{R}^\infty = \mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{\alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$ dotato delle operazioni

$$(\alpha+\beta)(j) := \alpha(j)+\beta(j) \quad \forall j \in \mathbf{N}, \quad (t\alpha)(j) := t\alpha(j) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{N}$$

$\mathbf{R}^{[a,b]} := \{f : [a,b] \to \mathbf{R}\}$ dotato delle operazioni

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad \forall x \in [a,b], \quad (tf)(x) := tf(x) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, x \in [a,b]$$

$C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbf{R}, f \text{ continua}\}$

Combinazioni lineari e lineare indipendenza, sottospazi lineari, basi

1. Se $u, v \in V$ e $s, t \in \mathbf{R}$, $su + tv$ é combinazione lineare di u, v con coefficenti s, t. Dato $A \subset V$, scriveremo

$$< A >:= \text{insieme delle combinazioni lineari di elementi di } A.$$

Diremo che $v_j, j = 1, \ldots, p$ sono tra di loro linearmente indipendenti se

$$\sum_{j=1}^{p} t_j v_j = 0 \quad \Rightarrow \quad t_j = 0 \quad \forall j$$

2. $V_0 \subset V$ é sottospazio lineare se $u, v \in V_0, s, t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad su + tv \in V_0$. Chiaramente $< A >$ é sottospazio lineare (generato da A).

Esempi. Siano

$$l^\infty := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \quad \sup_j |\alpha(j)| < +\infty\}, \qquad c_0 := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \quad \alpha(j) \to_j 0\}$$

$$l^p := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \quad \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|^p < +\infty\}$$

Allora, se $p \geq 1$, $\quad l^p \subset c_0 \subset l^\infty \quad$ e sono sottospazi lineari di $\mathbf{R}^\infty$.
Che l^p sia lineare segue dalla convessitá, quando $p \geq 1$, di $f(t) = |t|^p$, i $|a + b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p)$, che dá appunto $\alpha, \beta \in l^p \Rightarrow \alpha + \beta \in l^p$.

3. Un sistema di vettori linearmente indipendenti $v_i : i = 1, \ldots, n$ che generino V si chiama **base** di V. Ricordiamo che se V ha una base di n elementi, ogni altra base di V ha esattamente n elementi, e tale numero si chiama la dimensione di V. Se v_j forma una base per V, allora ogni $v \in V$ si scrive, in modo unico, nella forma $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$. I numeri c_j si chiamano *componenti o coordinate* di v nella base v_j.

Ad esempio, se $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ é la base canonica di $\mathbf{R}^n$, un vettore x di $\mathbf{R}^n$ si scrive $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ $\quad$ (x_j = componenti o coordinate di x nella base e_j).

Trasformazioni lineari. Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$. Una funzione $L : V \to W$ si dice lineare se

$$L(su + tv) = sL(u) + tL(v) \qquad \forall u, v \in V$$

Chiaramente $\Im L = \{L(u) : \quad u \in V\}$ e $KerL := \{v \in V : \quad L(v) = 0\}$ sono sottospazi lineari rispettivamente di W, V.

Esempio. Data $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ matrice $m \times n$ (m righe ed n colonne), la

$$L_{\mathcal{A}}(x) := \mathcal{A}x = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j) \qquad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

é funzione (o trasformazione) lineare da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. La sua immagine é un sottospazio lineare (di dimensione pari al rango di $\mathcal{A}$).

Matrice rappresentativa. Viceversa, se $e_i, i = 1, \dots, n$, $f_j, j = 1, \dots, m$ sono basi di V, W, rispettivamente, *ogni trasformazione lineare da V a W si rappresenta mediante una matrice $m \times n$.*
Sia infatti L trasformazione lineare da V a W. Siano, per ogni j, a_{ij}, $i = 1, \dots, m$ le componenti di Le_j nella base f_i, cioé

$$Le_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Allora, se $u = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ e $v := L(u) = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i$, si ha

$$v = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i = Lu = \sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) f_i$$

ovvero, se $y = (y_1, \dots, y_m)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, posto $\mathcal{A}_L := (a_{ij})$, si ha $\quad y = \mathcal{A}_L x$
Cioé, identificando u ed Lu con le loro coordinate x ed y, L opera su x come $\mathcal{A}_L$, che si chiama quindi matrice rappresentativa di L nelle basi date.

PRODOTTO SCALARE

Sia V spazio lineare su $\mathbf{R}$. Una $b : V \times V \to V$ si dice prodotto scalare in V se é

simmetrica $\quad b(u, v) = b(v, u) \qquad \forall u, v \in V$

bilineare: $\quad b(su + tv, w) = sb(u, w) + tb(v, w), \qquad \forall u, v, w \in V, \forall s, t \in \mathbf{R}$

positiva $\quad b(u, u) > 0 \qquad \forall u \neq 0$

Un prodotto scalare, se non c'é confusione, si indica usualmente $< ., . >$.

NOTA. Se $< ., . >$ é prodotto scalare in V, allora, per ogni $u \in V$,

le applicazioni $\quad v \to < u, v > \quad$ sono lineari.

Esempi. Sia $e_j : j = 1, \ldots, n$ base per V, vettoriale.
Dati $u := u = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j,\ v := u = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$

$$< u, v > \ := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \quad \text{é prodotto scalare.}$$

Prodotto scalare in $C([a,b])$. $\quad < f, g > := \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Norma.
Sia V vettoriale. Una applicazione di V in $\mathbf{R}$, $v \to \|v\|$ si dice norma in V se

(i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ e $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$

(ii) $\|tu\| = |t|\ \|u\| \quad \forall u \in V,\ t \in \mathbf{R}$ (**positiva omogeneitá**)

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ (**diseguaglianza triangolare**)

Uno spazio vettoriale V, dotato di una norma, si dice **Spazio Normato**

CAUCHY-SCHWARTZ Sia $< ., . >$ prodotto scalare in V. Sia

$$\|v\| := \sqrt{< v, v >} \quad \forall v \in V$$

Allora $\qquad | < u, v > | \ \leq \ \|u\|\ \|v\| \qquad \forall u, v \in V.$
Corollario: $\quad v \to \sqrt{< v, v >}$ é una norma.

Prova. $\quad 0 \ \leq < u + tv, u + tv > = \ \|u\|^2 + 2t \ < u, v > \ + t^2\|v\|^2 \quad \forall t$
$\Rightarrow \ < u, v >^2 - \|u\|^2\ \|v\|^2 \ \leq \ 0.$

Inoltre, $\sqrt{< v, v >} \ \geq \ 0$ e $\sqrt{< v, v >} = 0 \Rightarrow v = 0.$ Infine :

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v > \ \leq \ \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Esempi. In $\mathbf{R}^n$. $\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$ é una norma (la *norma euclidea*). La diseguaglianza triangolare si scrive

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se $n = 2$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é la lunghezza del vettore (x, y), ovvero del segmento di estremi (x, y) e $(0, 0)$.

Altre norme in $\mathbf{R}^n$.
Se $p \geq 1$, $\quad \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$; $\qquad \|x\|_\infty := max_j |x_j|$.

Prodotto scalare e norma in l^2 . Se $\alpha, \beta \in l^2$, allora, per ogni N risulta

$$\sum_{j=1}^N |\alpha(j)\beta(j)| \leq \left(\sum_{j=1}^N |\alpha(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^N |\beta(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |\alpha(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\beta(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Dunque $\sum_{j=1}^\infty \alpha(j)\,\beta(j)$ é assolutamente convergente e dunque definisce un prodotto scalare su l^2, cui corrisponde la norma

$$\|\alpha\| = \left(\sum_{j=1}^\infty |\alpha(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

In $C([a,b])$. La norma associata al prodotto scalare $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$ é $\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$. La diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si scrive

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \left(\int_a^b |f|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ortogonalitá. Sia $< .,. >$ prodotto scalare in V. Due vettori u, v si dicono tra loro ortogonali se $< u, v >= 0$.

Se $A \subset V$, $A^\perp := \{v \in V : quad < v, h >= 0 \quad \forall h \in A\}$. Si vede subito che $A^\perp$ é sottospazio lineare.

Teorema di Pitagora. $\quad < u, v >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Infatti $\|u+v\|^2 =< u+v, u+v >= \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$.

SPAZI METRICI Sia X un insieme. Una $\quad d : X \times X :\to [0, +\infty)$ tale che

(i) $\; 0 \leq d(u,v), \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n \qquad d(u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$ **(positivitá)**
(ii) $\; d(u,v) = d(v,u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n$ **(simmetria)**
(iii) $\; d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{R}^n$ **(diseguaglianza triangolare)**

si chiama **distanza o metrica** su X e (X, d) si chiama **spazio metrico** .

Metrica associata a una norma . Sia $(V, \|.\|)$ spazio normato. Allora

$$d(u,v) := \|u-v\| \qquad \text{é una metrica su } V$$

NOTAZIONE. Sia (X,d) spazio metrico. Siano $r>0$ e $x_0 \in X$. Scriveremo

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \ d(x,x_0) < r\}$$

$B_r(x_0)$ é la **palla aperta di raggio** r **e centro** x_0. Se V é spazio normato, é

$$B_r(x_0) = rB_1 + x_0 := \{rx + x_0 : x \in B_1\} = B_r + x_0 = \{x + x_0 : x \in B_r\}, \quad B_r := B_r(0)$$

SUCCESSIONI CONVERGENTI in uno SPAZIO METRICO

Sia (X,d) spazio metrico. Siano $x_k, x \in X$. Allora

$$x_k \to_k x \quad \Leftrightarrow \quad d(x_k, x) \to_k 0$$

Se V é spazio normato, $\quad v_k \to_k v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_k - v\| \to_k 0.$

In $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea $\|.\|_2$: $\quad v_k \to_k v$ in $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow \|v_k - v\|_2 \to_k 0$.
(i) Sia $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, $u = (x_1, \ldots, x_n)$, allora

$$v_k \to_k v \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n |x_{k,j} - x_j|^2 \to_k 0 \ \Leftrightarrow \ x_{k,1} \to_k x_1, \ldots, \ x_{k,n} \to_k x_n$$

(ii) u_k converge $\quad \Rightarrow \quad \sup_k \ ||u_k|| < +\infty \quad$ (ma non viceversa)

(iii) $u_k \to u, v_k \to v \quad \Rightarrow \quad tu_k + sv_k \to tu + sv \qquad \forall t, s \in \mathbf{R}$

CONTINUITÁ

Siano (X,d) e (Y,ρ) spazi metrici, $x_0 \in A \subset X$. Una $f : A \to Y$ si dice continua in x_0 se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad d(x,x_0) \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \rho(f(x), f(x_0)) \le \epsilon$$

ovvero $\forall \epsilon > 0, \exists \delta := \delta_\epsilon : \quad f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$.
f si dice continua in A se é continua in ogni punto di A. $\quad C(A, \mathbf{R}^n)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A a valori in $\mathbf{R}^n$ ($C(A) := C(A, \mathbf{R})$).

Proposizione 1 Sia $f : A \to Y$, $\quad x \in A$. Allora
(i) f é continua in $x \quad \Leftrightarrow \quad (x_n \in A, \quad x_n \to_n x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x))$
(ii) Se $Y = \mathbf{R}^m$ e $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $\quad f$ é continua in $x \Leftrightarrow$ le f_j sono continue in x.

La dimostrazione di (i) é come nel caso $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
La (ii) segue dal fatto che $f(x_n) \to f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_j(x_n) \to f_j(x)$ per $j = 1, \ldots, m$.

Proposizione 2 Siano $A \subset \mathbf{R}^n$, $f, g : A \to \mathbf{R}^m$ continue in $u \in A$. Allora
(i) $\alpha f + \beta g$ é continua in $u \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
(ii) se $m = 1$, fg é continua in u e, se $g(u) \neq 0$ anche $\frac{f}{g}$ é continua in u
(ii) se $f(A) \subset B$ e $\phi : B \to \mathbf{R}^p$ é continua in $f(u)$, allora $\phi \circ f$ é continua in u.

ESEMPIO IMPORTANTE. **Le funzioni lineari da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ sono continue**.
Una *forma lineare* $l : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ si rappresenta mediante un vettore :

$$l(x) = l(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j l(e_j) =< x, a > \quad \text{ove} \quad a = (l(e_1), \ldots, l(e_n)).$$

Siccome (Cauchy-Schwartz) $\ | < x - x_0, a > | \leq \|x - x_0\| \times \|a\|$, $\ l$ é continua.
Una *trasformazione lineare* $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ si rappresenta mediante una matrice:

$$L(x) = L(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j [\sum_{i=1}^m < Le_j, f_i > f_i].$$

(f_i base canonica in $\mathbf{R}^m$). Cioé $\quad L(x) = \mathcal{A}x \quad$ ove $\quad \mathcal{A} = (< Le_j, f_i >)_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n}$.
Siccome $\|\mathcal{A}x\|^2 = \sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j]^2 \leq \sum_{i=1}^m [\|x\|^2 \sum_{j=1}^n a_{ij}^2] = \|x\|^2 [\sum_{ij} a_{ij}^2]$, e $L(x) - L(x_0) = \mathcal{A}(x - x_0)$, vediamo che L é funzione continua.

ESEMPI: (i) i polinomi in $x_1, \ldots, x_n$, $exp(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$, $\sin(x_1 \ldots x_n)$, sono funzioni continue.
(ii) Sia $\quad f(x, y) := \frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2} \quad$ se $x^2 + y^2 \neq 0$, $\quad f(0, 0) = 0$
Se $n \geq 4$, f é continua in $(0, 0)$: $\quad |2xy| \leq x^2 + y^2 \Rightarrow |\frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2}| \leq \frac{y^2 |y|^{n-3}}{x^2+y^2} \leq |y|^{n-3}$
Se $n = 3$, f é discontinua in $(0, 0)$ perché $f(x, mx) = \frac{m^3}{(1+m^2)^2} \quad \forall x \neq 0$.
Se $n = 1, 2$, da $\quad f(x, mx) = \frac{m^3}{x^{3-n}(1+m^2)^2} \quad$ segue che $\quad f$ non é limitata attorno a $(0, 0)$, e quindi non é continua in $(0, 0)$ perché $\qquad g$ continua in $u \quad \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 : \quad \|g(v)\| \leq \|g(v) - g(u)\| + \|g(u)\| \leq 1 + \|g(u)\| \quad \text{se} \quad \|v - u\| \leq \delta.$$

Notiamo che, fissato y, $x \to f(x, y)$ é continua, e lo é anche $y \to f(x, y)$ per ogni fissato x, e ció quale che sia $n \in \mathbf{N}$. La 'continuitá in x ed y' é quindi una proprietá molto piú debole della 'continuitá nel complesso delle variabili'.

(iv). Sia $f(x, y) = xy \log(x^{2n} + y^{2m})$, $f(0, 0) = 0$. Proviamo che f é continua (anche) in $(0, 0)$. Possiamo supporre e $|x| + |y| \leq 1$ e $n \geq m$. Da $|xy|^n \leq \frac{1}{2}(|x|^{2n} + |y|^{2n})$ segue $|xy \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq (|x|^{2n} + |y|^{2m})^{\frac{1}{n}} \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq \epsilon$ se $(x^{2n} + y^{2m}) \leq \delta$ per un $\delta = \delta_\epsilon$ opportuno, perché $t^{\frac{1}{n}} \log t \to 0$ al tendere di t a 0^+.

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Sia $\dot{B}_r(u) = B_r(u) \setminus \{u\}$. Sia u_0 tale che $\dot{B}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f = l \iff (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f = +\infty \iff (\forall M > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow f(u) \geq M)$$

Se $B'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = l \iff (\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0 : \ u \in A,\ ||u|| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = +\infty \iff (\forall M > 0,\ \exists R_M > 0 : \ u \in A,\ ||u|| \geq R_M \Rightarrow f(u) \geq M)$$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che

(i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\iff$

$$(u_n \in A,\ u_n \neq u_0,\ u_n \to u_0 \ (|u_n| \to +\infty) \Rightarrow f(u_n) \to l)$$

(ii) (**Cauchy**) f ha *limite finito* l per u tendente a u_0 $\iff$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u, v \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\iff$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \exists R_\epsilon > 0 : \ u, v \in A,\ |u|, |v| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

ESEMPI . **(i)** Sia $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)\ \forall u_0 \neq 0$. Invece,

$\lim_{u \to 0} f(u)$ e $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esistono: $f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$. Come sopra, $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)\ \forall u_0 \neq 0$. Ed é anche $\lim_{u \to 0} f(u) = 0$: $|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

Poi, $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esiste: $f(x,x) = \frac{x}{2} \to_{x \to \pm\infty} \pm\infty$.

(iii) Sia $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y^2}$ se $y \neq 0$. Se $x_n \to x \neq 0$ e $y_n \to 0$ allora $\frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\infty$ e quindi $\arctan \frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\frac{\pi}{2}$. Poi, siccome $f(x, \sqrt{|x|}) = (sign x)\frac{\pi}{4}$, la f non ha limite al tendere di (x,y) a $(0,0)$.

ESERCIZI E COMPLEMENTI

1. Siano $p, q > 1$ *esponenti coniugati*, cioé $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora

$$|xy| \le \tfrac{|x|^p}{p} + \tfrac{|y|^q}{q} \qquad \forall x, y \in \mathbf{R} \qquad (\textbf{ diseguaglianza di Holder} \text{ in } \mathbf{R})$$

Dato $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, sia $\|x\|_p := \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Allora

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| \le \|x\|_p \ \|y\|_q \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n \qquad (\textbf{ diseguaglianza di Holder in } \mathbf{R}^n)$$

Infine, posto $\mathbf{R}^\infty := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$, si ha

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^\infty \qquad (\textbf{ Holder in } \mathbf{R}^\infty)$$

Prova. Per ogni $y \ge 0$ la funzione $x \to xy - \frac{x^p}{p}$, $x \ge 0$ é superiormente limitata e raggiunge il suo massimo in $x(y)$ tale che $y - x^{p-1} = 0$ ovvero $x(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ e tale massimo vale $y\, y^{\frac{1}{p-1}} - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} = \frac{1}{q}\, y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^{\frac{1}{q}}}{q}$.
Da qui la diseguaglianza di Holder in $\mathbf{R}$: $xy - \frac{x^p}{p} \le \frac{y^{\frac{1}{q}}}{q}$ $\quad \forall x, y \ge 0$.
Da questa segue subito la versione in $\mathbf{R}^n$:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x\|_p} \frac{y_j}{\|y\|_q} \right| \le \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Infine, per avere Holder in $\mathbf{R}^\infty$, basta passare al limite nella diseguaglianza

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

2. La Diseguaglianza di Minkovskii: $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$.

Segue da Holder: $\|x+y\|_p^p \le \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1}\, |x_j| + \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1}\, |y_j| \le$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p + \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \|y\|_p$. Infatti, essendo $q(p-1) = p$, troviamo $\|x+y\|_p = \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

11. Dati $\alpha,\ \beta\ >\ 0,$ sia

$$f(x,y)\ =\ \frac{|x|^\alpha\ |y|^\beta}{x^2+y^2}\quad \text{se}\quad x^2+y^2\ \neq\ 0,\quad f(0,0)\ =\ 0$$

Provare che f é continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha\ +\ \beta\ >\ 2$.

Se $\alpha+\beta-2\leq 0,\ \ f(tx,ty)\ =\ t^{\alpha+\beta-2}f(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2\neq 0$) e quindi f non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha\ +\ \beta\ -\ 2\ >\ 0.$

Se $\alpha\geq 2$ é $f(x,y)\leq |x|^{\alpha-2}\,|y|^\beta \rightarrow_{x^2+y^2\rightarrow 0} 0$. Analogamente se $\beta\geq 2$.

Resta da considerare il caso $\alpha,\ \beta\ <\ 2$. In tal caso, $\delta\ :=\ \frac{\alpha+\beta-2}{2}\ \in (0,\frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\})$ e possiamo scrivere

$$f(x,y)\ =\ \frac{|x|^{\alpha-\delta}\ |y|^{\beta-\delta}}{x^2+y^2}\,(|x|^\delta\ |y|^\delta\ )$$

ove $\delta>0,\ \alpha-\delta\ >\ 0,\ \beta-\delta\ >\ 0,\ \alpha\ +\ \beta-\ 2\delta\ =\ 2.$ Dalla diseguaglianza di Holder, segue che, se $0<r,s,\ \ r+s=2$ allora (prendendo $p:=\frac{2}{r},\ \ q:=\frac{2}{s}$ nella diseguaglianza di Holder)

$$|x|^r\ |y|^s\ \leq\ \frac{r}{2}\,x^2\ +\ \frac{s}{2}\,y^2\ \leq\ x^2\ +\ y^2\quad \forall x,y\in\mathbf{R}$$

e quindi $|x|^{\alpha-\delta}\ |y|^{\beta-\delta}\ \leq\ x^2\ +\ y^2$ e quindi $f(x,y)\ \leq\ |x|^\delta\ |y|^\delta \rightarrow_{x^2+y^2\rightarrow 0} 0.$