

Am120 – Soluzioni Tutorato I

Derivate

Venerdì 4 Marzo 2011

Filippo Cavallari e Vincenzo Morinelli

Esercizio 1 In tutti i casi calcoleremo il limite del rapporto incrementale:

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(3) Ricordando che $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ e notando che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x + \tanh}{1 - \tan x \tanh} - \tan x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tanh + \tan^2 x \tanh}{h(1 - \tan x \tanh)} \\ &= (1 + \tan^2 x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tanh}{h} \frac{1}{1 - \tan x \tanh} = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

(4) Ricordando la formula di prostaferesi

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

e il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos[(x+h)^n] - \cos[x^n]}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2}{h} \sin\left[\frac{(x+h)^n + x^n}{2}\right] \sin\left[\frac{(x+h)^n - x^n}{2}\right] \\ &= -\sin(x^n) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(x+h)^n - x^n} \sin\left[\frac{(x+h)^n - x^n}{2}\right] \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= -\sin(x^n) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n}{h} \\ &= -\sin(x^n) \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} \\ &= -\sin(x^n) \binom{n}{n-1} x^{n-1} \\ &= -nx^{n-1} \sin(x^n) \end{aligned}$$

Esercizio 2 Utilizzando la regola di derivazione del prodotto si ottiene:

$$\begin{aligned}(fgh)'(x_0) &= (fg)'(x_0)h(x_0) + (fg)(x_0)h'(x_0) = [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]h(x_0) + (fg)(x_0)h'(x_0) = \\ &= f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)\end{aligned}$$

Esercizio 3 Si ottiene

$$(1) \frac{1}{x}$$

$$(2) rx^{r-1}$$

$$(3) -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(4) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(5) \frac{1}{1+x^2}$$

$$(6) \cos(3x^3 + 4^x) \cdot (9x^2 + 4^x \ln 4)$$

$$(7) e^x(1 + 2x + x^2 + 21x^6 + 3x^7)$$

$$(8) 2x \cdot \ln 7 \cdot 7^{x^2+4}$$

$$(9) \cos(\pi^{\tan x}) \cdot \pi^{\tan x} \cdot \frac{\ln \pi}{\cos^2 x}$$

$$(10) \ln x \cdot \sin x + \sin x + x \cdot \ln x \cdot \cos x$$

$$(11) e^{\sin(e^x)} \cdot \cos(e^x) \cdot e^x$$

$$(12) \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}$$

$$(13) \left[\frac{2}{(x+3)^2} + \frac{x+1}{x+3} \sin x \right] e^{-\cos x}$$

$$(14) \frac{1 + \cos(\ln x)}{x[x + \sin(\ln x)]}$$

$$(15) 2xe^{x^2+1} \left[\ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} \right]$$

$$(16) \frac{(2 \sin x \cos x - \sin x) \ln x}{\ln^2 x} - \frac{\sin^2 x + \cos x}{x \ln^2 x}$$

$$(17) \cos\left(\frac{\ln x}{x^3+4}\right) \cdot \left[\frac{1}{x(x^3+4)} - \frac{3x^2 \ln x}{(x^3+4)^2} \right]$$

$$(18) 2 \ln(\arcsin x) \cdot \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(19) \frac{5x^4 + \pi x^{\pi-1}}{(x \ln 2) [1 + (x^5 + x^\pi)^2]} - \frac{\arctan(x^5 + x^\pi)}{x^2 \ln 2}$$

$$(20) e^{\tan x} \left[\cos(30x^3 - x^7) \cdot (90x^2 - 7x^6) + \sin(30x^3 - x^7) \cdot (1 + \tan^2 x) \right]$$

$$(21) 2|x|$$

$$(22) \operatorname{sgn}(x) \sin|x^2+1| + 2x|x| \cos|x^2+1|$$

$$(23) \alpha \left(\frac{2|x|}{(x^2+1)^2} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2(x^2+1)^2 \operatorname{sgn}(x) - 8x|x|(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$(24) e^{\frac{1}{|x|^3 + \ln x}} \left(3x^2 \operatorname{sgn}(x^3 - 1) - |x^3 - 1| \cdot \frac{3x^3 \operatorname{sgn}(x) + 1}{x(|x|^3 + \ln x)^2} \right)$$

Esercizio 4 (1) Dato che risulta $f(0) = 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 + bx + 3 = 3 \lim_{x \rightarrow 0^-} 7e^x - 4 = 3$ la funzione è continua $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Inoltre poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2ax + b = b \lim_{x \rightarrow 0^-} 7e^x = 7$ la funzione è derivabile nell'origine se $b = 7$.

(2) Dato che risulta $f(1) = \frac{4a+b}{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4a+b}{x^2+1} = \frac{4a+b}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2x(a+b) - 1 = 2(a+b)$ la funzione è continua se $b = 0$. Inoltre poiché $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-8ax}{(x^2+1)^2} = -2a \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 2a = 2 + 2a$ la funzione è derivabile nell'origine se $a = -\frac{1}{2}$

Esercizio 5 In tutti i casi utilizzeremo il metodo di dimostrazione per induzione:

(1) Base induttiva: $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

Passo induttivo: supponiamo che

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)x^{\alpha-n+1}$$

e quindi

$$\frac{d^n}{dx^n} x^\alpha = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^\alpha \right) = \frac{d}{dx} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)x^{\alpha-n+1} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

cioè la tesi.

(2) Base induttiva: dalle formule di addizione del seno si ottiene che

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = \frac{d}{dx} \sin x$$

Passo induttivo: supponiamo che

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \sin x = \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \sin x \right) = \frac{d}{dx} \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

cioè la tesi.

(3) Base induttiva: dalle formule di addizione del coseno si ottiene che

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \frac{d}{dx} \cos x$$

Passo induttivo: supponiamo che

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \cos x = \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \cos x \right) = \frac{d}{dx} \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

cioè la tesi.

(4) Base induttiva: $\frac{d}{dx} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Passo induttivo: supponiamo che

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{ax+b}{cx+d} = (-1)^{n-2} c^{n-2} (n-1)! \frac{ad-bc}{(cx+d)^n}$$

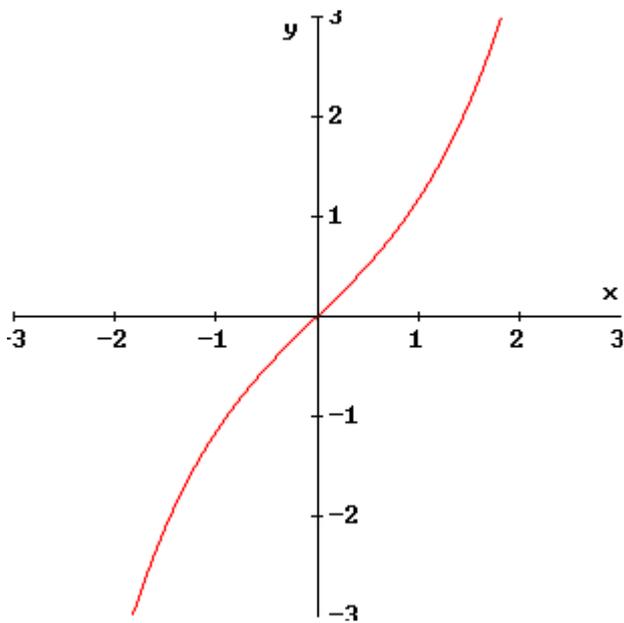
e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \frac{ax+b}{cx+d} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{ax+b}{cx+d} \right) = \frac{d}{dx} \left((-1)^{n-2} c^{n-2} (n-1)! \frac{ad-bc}{(cx+d)^n} \right) = \\ &= (-1)^{n-2} c^{n-2} (n-1)! (ad-bc) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(cx+d)^n} \right) = \\ &= (-1)^{n-2} c^{n-2} (n-1)! (ad-bc) \frac{-nc}{(cx+d)^{n+1}} = \\ &= (-1)^{n-1} c^{n-1} (n)! \frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}} \end{aligned}$$

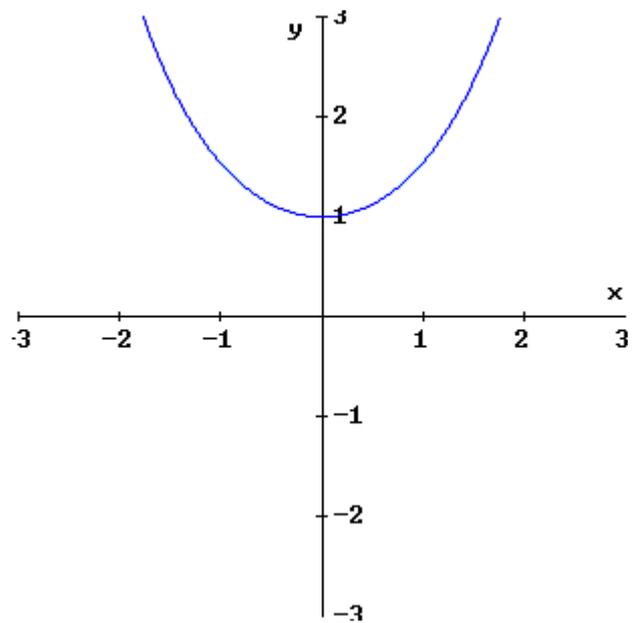
cioè la tesi.

Esercizio 6

- a. È immediato verificare dalla definizione che $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ e $\cosh(-x) = \cosh(x)$, cioè il seno iperbolico è dispari e il coseno iperbolico è pari. Riportiamo i grafici delle due funzioni:



$y = \sinh x$



$y = \cosh x$

b. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$

- c. Applicando le regole di derivazione si vede facilmente che

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

d. Applicando la regola di derivazione di funzione inversa si ricava che

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

e. Posto $s(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ e $c(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ si ha che $s'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ e

$c'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Quindi da $s(0) = \sinh^{-1}(0) = 0$ $c(1) = \cosh^{-1}(1) = 0$ segue l'asserto

f. $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

g. Si ottiene

(1) $\cosh(\cosh(\sinh x)) \cdot \sinh(\sinh x) \cdot \cosh x$

(2) $\cosh\left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{7^x}\right) \cdot \frac{(3x^2 + 2x + 1) - \ln 7 (x^3 + x^2 + x + 1)}{7^x}$

(3) $e^{\sinh(\arctan x)} \cdot \cosh(\arctan x) \cdot \frac{1}{1 + x^2}$

Esercizio 7 Notiamo che la funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in quanto prodotto e composizione di funzioni continue. Affinché $f(x)$ è continua nell'origine deve risultare che $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0$ e quindi $\alpha > 0$. Analogamente funzione è derivabile $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Affinché lo sia anche nell'origine deve esistere finito il limite del rapporto incrementale. Osserviamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha-1} \sin \frac{1}{h}$$

che non esiste se $0 < \alpha \leq 1$ ed è uguale 0 se $\alpha > 1$ (il caso $\alpha \leq 0$ non lo consideriamo perché la funzione non è neanche continua!). Infine usando le regole di derivazione si ottiene che:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

che è continua nel suo campo di esistenza. Quindi per quanto visto prima $f'(x)$ è continua nell'origine se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} = 0$$

cioè se $\alpha > 2$.

Esercizio 8 Essendo $q > 0$ la disuguaglianza

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^2}$$

è equivalente a

$$|\alpha q - p| > \frac{c}{q}.$$

Scriviamo ora il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h)}{h} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\alpha + h_n)}{h_n}$$

con $h_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Passando eventualmente ad una sottosuccessione, possiamo distinguere due casi:

1. $\exists \bar{n} : \alpha + h_n \notin \mathbb{Q} \quad \forall n \geq \bar{n}$
2. $\exists \bar{n} : \alpha + h_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \geq \bar{n}$

Nel primo caso, dalla definizione di $f(x)$, si ha che $f(\alpha + h_n) = 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$ e quindi il limite del rapporto incrementale è nullo.

Nel secondo caso possiamo scrivere $\alpha + h_n = \frac{p_n}{q_n} \quad \forall n \geq \bar{n}$, con p_n e q_n successioni di interi coprimi

e $q_n > 0$. Dunque, dall'ipotesi e osservando che $h_n = \frac{p_n}{q_n} - \alpha$, si ha

$$0 \leq \left| \frac{f(\alpha + h_n)}{h_n} \right| = \left| \frac{1}{q_n^3 \cdot h_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 |p_n - \alpha q_n|} < \frac{1}{c q_n}$$

e, poiché $q_n \rightarrow +\infty$, dal teorema dei carabinieri segue la tesi.