AM120 2010-2011: APPELLO A

TEMA 1.

Enunciare e dimostrare la formula di derivazione delle funzioni composte.

TEMA 2. Mostrare che una successione di funzioni f_n definite in $[a,b]$ converge uniformemente in $[a,b]$ se e solo se soddisfa la condizione (di Cauchy)

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon : \qquad \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon \qquad \forall n, m \ge n_\epsilon$$

Dedurre che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \quad \text{é uniformemente convergente}$$

TEMA 3. Sia f una funzione convessa in (a,b). Provare che

(i) f é continua in (a,b)

(ii) detto $D := \{x \in (a,b) : \quad f \text{ é derivabile in } x\}$, provare che l'insieme $(a,b) \setminus D$ é al piú numerabile.

TEMA 4.

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dare la definizione di integrabilitá e di integrale per f e mostrare che f é integrabile se e solo se lo sono la parte positiva f^+ e la parte negativa f^- di f e che $\int\limits_{\mathbf{R}} f = \int\limits_{\mathbf{R}} f^+ - \int\limits_{\mathbf{R}} f^-$.
Dedurre che $f \in C(\mathbf{R})$ é integrabile se e solo se $|f|$ é integrabile. É vera questa affermazione se f non é continua?

Provare poi che la somma di due funzioni integrabili é integrabile e che l'integrale della somma é la somma degli integrali.

TEMA 5.

Usando il confronto tra integrali e serie, provare che

$$\exists b > 0 \qquad \text{tale che} \qquad n! = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \, (b + O(\frac{1}{n}))$$

ESERCIZIO 1.

Determinare, laddove esistono, le primitive delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = \cosh^2 x, \qquad g_2(x) = \sqrt{x^2-1} \qquad g_3(x) = \frac{x^2}{(x^2-1)^2}$$

ESERCIZIO 2. Sia

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}\left[\arctan(\frac{x^2}{x^2-1}) + \arctan(\frac{x^2-1}{x^2})\right] \quad x \neq 0, \pm 1,$$

Calcolare la derivata di f e disegnare il grafico di f.

ESERCIZIO 3.

Sia $t > 0$. Dire, motivandolo, se esistono i seguenti integrali

$$I_1 = \int_t^{2t} \sqrt{\frac{x+t}{x-t}}dx, \qquad I_2 = \int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\cos^2 x dx \qquad I_3 = \int_t^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+t^2)^2}dx$$

ed eventualmente calcolarli.

ESERCIZIO 4.

Dire, motivando, se le seguenti funzioni sono integrabili/integrabili in senso improprio su $(-\infty, +\infty)$:

$$k(x) = \sqrt[3]{x}\cos x^4, \qquad h(x) = \frac{\arcsin(\sin x)}{x}$$

ESERCIZIO 5. Sia

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2\arctan n)x^n \qquad |x| < 1$$

Dire perché f é dotata di primitiva e calcolarne la primitiva che si annulla in $x = 0$. Dedurre che f é integrabile (in senso improprio) in $[0, 1]$.