AM120 Settimana 7

FUNZIONI ANALITICHE

Una funzione $f \in C^\infty(I)$ si dice analitica nell' intervallo aperto I se é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad ogni $x_0 \in I$:

$$\forall x_0 \in I, \ \exists\, r = r(x_0): \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

NOTA. Non tutte le funzioni $C^\infty(I)$ sono analitiche in I:

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é C^∞, con derivate di ogni ordine uguali a zero in $x = 0$: dunque f non é somma della sua serie di Taylor.

Proposizione Sia $f \in C^\infty((a,b))$. Se

$$\exists\ M, \ r > 0: \qquad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \ \ \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a,b). Piú precisamente, $\forall\ x_0 \in (a,b)$, si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap (a,b)$$

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che $R_n(x, x_0) \to 0$ al tendere di n all'infinito, per ogni $x \in x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap [a,b]$. E infatti

$$|R_n(x,x_0)| = |\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(tx + (1-t)x_0)| \leq M(\frac{|x-x_0|}{r})^{n+1} \to 0$$

La somma di una serie di potenze é una funzione analitica

Prova. Sia $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza r, e siano $0 < \underline{r} < \overline{r} < r$. Da $\limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{r} =< \frac{1}{\overline{r}}$ segue che

$$\exists\ \overline{k}: \qquad |a_{j+k}| \leq \frac{1}{\overline{r}^{j+k}}, \qquad \forall k \geq \overline{k}, \ \ \forall j \in \mathbf{N}$$

Da $\qquad f^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, a_{j+k}\, x^j \qquad$ segue

$$|x| \leq \underline{r} \Rightarrow \quad |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \ \frac{\underline{r}^j}{\overline{r}^j} \ \frac{1}{\overline{r}^k}$$

Usando ora la formula $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, x^j = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1,1),$ otteniamo

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{\overline{r}^k(1 - \underline{r}\ \overline{r}^{-1})^{k+1}} = \frac{\overline{r}\, k!}{(\overline{r} - \underline{r})^{k+1}}, \quad \forall k \geq \overline{k},\ |x| \leq \underline{r}$$

Dalla Proposizione precedente segue che f é sviluppabile in serie di Taylor (di raggio di convergenza almeno $\overline{r} - \underline{r}$) attorno ad ogni punto dell'intervallo $[-\underline{r}, \underline{r}]$.

Principio di identitá Siano f, g analitiche in (a,b). Allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \quad f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad f \equiv g \ \text{ in}(a,b)$$

Prova. Dall'analiticitá: $\exists \delta > 0 : f(x) = g(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e quindi

$$b' := \sup\{x < b: \ f(t) = g(t) \quad \forall t \in [x_0, x]\} \geq x_0 + \delta > x_0$$

Ora, $x < b' \Rightarrow f \equiv g$ in $[x_0, x] \Rightarrow f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ in $[x_0, b'), \quad \forall n.$

Se fosse $b' < b$, sarebbe , per continuitá, $f^{(n)}(b') = g^{(n)}(b') \quad \forall n$ e quindi $f \equiv g$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.

Il principio di identitá si puó anche riformulare nel modo seguente

Corollario Sia f analitica in I. Sia $(a,b) \subset I \subset (a', b')$. Allora

(i) (continuazione unica) $f \equiv 0$ in $(a,b) \quad \Rightarrow f \equiv 0$ in I

(ii)(unicitá del prolungamento analitico) Se f_1, f_2 sono analitiche in (a', b') e $f_1 \equiv f \equiv f_2$ in I (cioé f_1, f_2 sono prolungamenti analitici di f ad (a', b')) allora $f_1 \equiv f_2$ in (a', b').

Zeri di funzioni analitiche Una funzione analitica in (a,b) e non identicamente nulla, ha, in (a,b), solo zeri isolati.

Prova. Se $f(x_n) = 0$ e $x_n \to_n x \in (a,b)$, é $f(x) = 0$ ed inoltre, per il teorema di Rolle, $\exists x'_n$ tra x_n e x_{n+1} tale che $f'(x'_n) = 0$ e quindi $f'(x) = \lim_n f'(x'_n) = 0$ Iterando l'argomento, si trovano, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $x_n^{(k)}$ zeri di $f^{(k)}$ che convergono a x e quindi $f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k$ e quindi $f \equiv 0$.