AM120 Settimana 6

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE. Sia $E \subset \mathbf{R}$. Siano $f_n : E \to \mathbf{R}$.

Diremo che **la 'successione di funzioni'** f_n **converge puntualmente in** E **alla funzione** f se, per ogni $x \in E$, $\quad f_n(x) \to_n f(x)$

Diremo che **la serie di funzioni** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge puntualmente in** E se la successione delle somme parziali $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge puntualmente in E e scriveremo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_n(x)$

ESEMPI. 1. Se $f_n(x) \equiv a_n, \quad x \in E \subset \mathbf{R}$, le f_n convergono se e solo se a_n converge e, in tal caso, $\lim_n f_n(x) \equiv \lim a_n$.
2. Se $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, allora f_n converge alla funzione che vale zero in $[0,1)$ e vale 1 in $x = 1$.
3. Ogni serie di potenze converge puntualmente dentro il proprio intervallo di convergenza.
4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ converge se e solo se $x = m\pi$ per qualche intero m (ed in tal caso la somma é zero) giacché $\limsup_n |\sin(nx)| > 0$ se $x \notin \mathbf{Z}\pi$. Infatti, sia $\limsup_n |\sin(nx)| = 0$ e quindi $\lim_n [\sin(nx)] = 0$. Sia $x \geq 0$ e $m(n) \in \mathbf{N}$ tale che $m(n)\pi \leq nx < [n(m)+1]\pi$. Allora $\min\{nx - m(n)\pi, \quad (m(n)+1)\pi - nx\} \to_n 0$, altrimenti esistono $n_k \to_k +\infty$ e $\delta > 0$ tali che $m(n_k)\pi + \delta \leq n_k x \leq (m(n_k)+1)\pi - \delta$ e quindi $|\sin(n_k x)| \geq \sin\delta$. Dunque, per ogni n esiste $l_n \in \mathbf{N}$ tale che $nx = l_n\pi + \circ(1)$. Allora, per ogni n, risulta $\circ(1) + l_{n+1}\pi = (n+1)x = x + l_n\pi + \circ(1)$ e quindi $x = (l_{n+1} - l_n)\pi + \circ(1)$. Da ció segue che $k_n := l_{n+1} - l_n$ é una successione limitata e quindi esiste k_{n_j} convergente a qualche intero k. Da $x = k_{n_j}\pi + \circ(1) \to_j k\pi$ segue appunto $x = k\pi$. Notiamo, in aggiunta, che $\liminf_n |\sin(nx)| = 0$ per ogni x. Questo é ovvio se x é multiplo razionale di π, mentre, se $\frac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$, usiamo il fatto (non banale..) che esistono $n_k \in \mathbf{N}, m_k \in \mathbf{Z}$ tendenti all'infinito tali che $|\frac{x}{\pi} - \frac{m_k}{n_k}| \leq \frac{1}{n_k^2}$ e quindi $|n_k x - m_k\pi| = \circ(1)$ e quindi $\sin(n_k x) = \sin(n_k x - m_k\pi) = \circ(1)$.
Concludiamo che $\lim_n(nx)$ esiste se e solo se x é multiplo intero di π.

In generale le proprietá delle f_n non si conservano nel limite puntuale. Nell'esempio $f_n(x) = x^n, \ x \in [0,1]$ le f_n sono continue, ma il loro limite non lo é. Ció si puó escludere se 'la convergenza é.....piú forte':

CONVERGENZA UNIFORME. Se f_n converge puntualmente in E ad f, si dice che la convergenza é uniforme (in E) se

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\to_{n\to\infty}0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ si dice uniformemente convergente in E se $S_n(x):=\sum_{j=1}^{n}a_n(x)$ converge uniformemente in E

ESEMPI. 1. La successione $f_n(x)=x^n$ converge uniformemente a zero in $[0,a]$ se $0<a<1$, ma la convergenza **non é uniforme** in $[0,1)$. Infatti

$$\sup_{x\in[0,a]}x^n=a^n\to 0 \qquad \text{mentre} \qquad \sup_{x\in[0,1)}x^n=1$$

2. (**Traslazioni**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x):=f(x-n)$ le traslate di f. Allora $f_n(x)\to_{n\to\infty}0$ $\forall x\in\mathbf{R}$, ma la convergenza **non é uniforme**, giacché $\sup_{\mathbf{R}}|f_n|=\sup_{\mathbf{R}}|f|$.

3. (**Cambi di scala**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x):=f(nx)$. Allora $f_n(x)\to_{n\to\infty}0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, ma la convergenza **non é uniforme**, giacché $\sup_{\mathbf{R}}|f_n| = \sup_{\mathbf{R}}|f|$.

4. $f_n(x):=\min\{n,\frac{1}{x}\}\to_{n\to\infty}\frac{1}{x}$, $\forall x\in(0,1]$, ma la convergenza **non é uniforme** in $(0,1]$. Infatti $\sup_{(0,1]}\frac{1}{x}=+\infty$ mentre vale chiaramente la seguente **Proprietá**. $\sup_{x\in E}|f_n(x)|<+\infty$, $f_n\to_{n\to\infty}f$ uniformemente in E $\Rightarrow$ $\sup_{x\in E}|f(x)|<+\infty$

Teorema 1 (la convergenza uniforme conserva la continuitá).

$$f_n\in C(E),\quad f_n\to_n f\quad \text{uniformemente in}\quad E\quad\Rightarrow\quad f\in C(E)$$

Dimostrazione. Fissato $\epsilon>0$ siano $n_\epsilon,\ \delta_\epsilon>0$ tali che
$|f_{n_\epsilon}(x)-f(x)|\le\epsilon$, $\forall x\in E$, $|f_{n_\epsilon}(x)-f_{n_\epsilon}(x_0)|\le\epsilon$ $\forall x\in E, |x-x_0|\le\delta_\epsilon$. Allora

$$|f(x)-f(x_0)|\le 2\epsilon,\ \forall x\in E,|x-x_0|\le\delta_\epsilon$$

NOTA. Se la convergenza non é uniforme il limite puó non essere continuo.

Controesempi: 1. $f_n(x)=x^n$, $x\in[0,1]$ converge (puntualmente) in $[0,1]$ a $\chi_{\{1\}}$, la funzione caratteristica dell'insieme $\{1\}$ (ovvero alla funzione che vale 1 nel punto 1 e zero altrove).

2. $f_n(x)=\frac{1}{1+nx^2}$ converge puntualmente alla funzione, discontinua in zero, $\chi_{\{0\}}$.

Teorema 2 (il limite delle derivate é la derivata del limite).

Siano I intervallo aperto, $f,g : I \to \mathbf{R}$, $f_n \in C^1(I)$ tali che $f_n(x) \to_n f(x)$ e $f_n'(x) \to_n g(x)$ in I. Allora

$$f_n' \to_n g \quad \text{uniformemente in} \quad I \quad \Rightarrow \quad f \in C^1(I) \quad \text{e} \quad (\lim_n f_n)' \equiv \lim_n f_n'$$

Dimostrazione. Fissato $x \in I$, sia $h + x \in I$. Siccome $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)| =$

$$= \lim_n |\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)| = \lim_n |f_n'(x + t(n,h)h - f_n'(x)|$$

per ogni n ed h e qualche $t(n,h) \in (0,1)$, basterá, fissato $\epsilon > 0$, trovare n_ϵ e δ_ϵ tali che

$$|f_n'(x + t(n,h)h - f_n'(x)| \le \epsilon \qquad \forall\, |h| \le \delta_\epsilon, \ \forall\, n \ge n_\epsilon$$

Ma $|f_n'(x + t(n,h)h - f_n'(x)| \le$

$$\le |f_n'(x + t(n,h)h - g(x + t(n,h)h)| + |g(x + t(n,h)h) - g(x)| + |g(x) - f_n'(x)| \le 3\epsilon$$

perché f_n' converge uniformemente a g e g é continua (perché le f_n' lo sono).

NOTA. La convergenza uniforme delle f_n' é essenziale. Controesempi:

Sia $f_n(x) := |x|^{1+\frac{1}{n}}$, $x \in (-1,1)$. É $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$ (limite uniforme!) che non é derivabile in $x = 0$ anche se le f_n sono di classe C^1. Notare che $f_n'(x) = (1 + \frac{1}{n})\frac{x}{|x|}|x|^{\frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{x}{|x|}$, per $x \ne 0$ e $f_n'(0) \to_n 0$ (convergenza non uniforme!)

Sia $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(nx)$, successione (uniformemente) convergente a zero in $\mathbf{R}$ di funzioni di classe C^1. É $f_n'(x) = \frac{1}{1+nx^2} \to_{n\to\infty} \chi_{\{0\}}$. Dunque la derivata del limite non é (in $x = 0$) il limite delle derivate.

Derivazione termine a termine nelle serie di funzioni.

(i) Siano $a_n \in C([a,b])$. Se la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)$ é uniformemente convergente in $[a,b]$, allora $S(x) := \sum_{n=1}^\infty a_n(x)$ é continua in $[a,b]$.

(ii) Siano $a_n \in C^1(I)$. Se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)$ converge in qualche punto di I e la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n'(x)$ converge uniformemente in I, allora

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^\infty a_n(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{da_n}{dx}(x)$$

Il criterio di Cauchy.

f_n é uniformemente convergente in E sse la f_n é **Cauchy uniforme**, ovvero

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon :\ \ n, m \geq n_\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad \sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Dimostrazione. NECESSITÁ: $\quad f_n \to f \quad$ uniformemente in $E \quad \Rightarrow$ $\exists n_\epsilon :\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon\ \forall x \in E$ se $n, m \geq n_\epsilon$.

SUFFICENZA: intanto, per ogni fissato x in E, la successione $n \to f_n(x)$ é di Cauchy, e quindi $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste finito per ogni x in E.

Poi, dall'ipotesi, fissato $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \ \leq\ |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \leq\ \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \forall x \in E$$

se $n \geq n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \geq n_\epsilon$ e mandando p all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)|\ \ \forall x \in E$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\ \ \forall x \in E$ e per ogni $n \geq n_\epsilon$ cioé f_n converge uniformemente ad f.

Criterio di Cauchy 2 . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente in E sse

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon :\ \ n \geq n_\epsilon, p \in \mathbf{N}\ \Rightarrow\ \sup_{x\in E}\ |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)|\ \leq\ \epsilon$$

Criterio di Leibnitz. Se $\ 0 \leq a_{n+1}(x) \ \leq a_n(x)\ \forall x \in E,\ n \in \mathbf{N},$ allora

$$\sup_{x\in E}\ a_n(x)\ \to_{n\to+\infty} 0\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, a_n(x)\ \text{converge uniformemente in}\ E$$

Intanto, la serie converge puntualmente in E per il criterio di Leibnitz per le serie numeriche. La convergenza é anche uniforme perché

$$-a_{2n-1}(x) \leq \sum_{k=2n-1}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \leq 0, \quad a_{2n}(x) \geq \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow$$

$$|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k\, a_k(x)|\ \leq\ a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \text{uniformemente in} \quad E$$

SERIE TOTALMENTE CONVERGENTI

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é totalmente convergente in E se $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in E} |a_n(x)|\ <\ +\infty$

La totale convergenza implica l'uniforme convergenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in E} |a_n(x)| < +\infty \Rightarrow |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \le \sum_{j=n}^{n+p} |a_j(x)| \le \sum_{j=n}^{n+p} \sup_{x\in E} |a_n(x)| \le \epsilon \ \ \forall x \in E$$

ESEMPI di serie uniformemente convergenti ma non totalmente convergenti:

1. Se $a_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge, ovviamente in modo uniforme , ma non é totalmente convergente, perché $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| = +\infty$.

2. sia $f \in C(\mathbf{R})$, nulla fuori di $(0,1)$, $a_n(x) := \frac{1}{n} f(x-n)$.

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(x-n)$ converge alla funzione $S(x)$ che vale $\frac{1}{n} f(x-n)$ in $[n, n+1]$ e zero se $x \le 0$. Inoltre la convergenza é uniforme in $\mathbf{R}$, perché $|S(x) - S_n(x)| = |\sum_{j>n} \frac{1}{j} f(x-j)| \le \frac{1}{n+1} \sup_{\mathbf{R}} |f| \to 0$.

La convergenza peró non é totale, perché $\sup_{x\in\mathbf{R}} |a_n(x)| = \frac{1}{n} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$.

Convergenza totale delle serie di potenze. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza r, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge totalmente in $[-\delta, \delta]$, $\forall \delta < r$:

$$\sup_{|x|\le\delta} |a_n x^n| = |a_n|\delta^n \quad \text{e} \quad \sum_{0}^{\infty} |a_n|\delta^n < +\infty$$

La somma di una serie di potenze é una funzione C^∞.

Le $a_n(x) := a_n x^n$ sono funzioni C^∞ e la serie delle derivate k-esime

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} x^j$$

é anch'essa serie di potenze ed il suo raggio di convergenza é

$$(\limsup_n |n(n-1)\dots(n-k+1)a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} = (\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

ESEMPIO: $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k}(\frac{1}{1-x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} x^j, \quad \forall x \in (-1,1)$.

Teorema di Abel. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza r e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge allora la convergenza della serie é uniforme in $[0, r]$. In particolare, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é continua anche in $x = r$.

Esempio. Per Leibnitz, $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ é definita in $(-1,1]$ ed é ivi continua per Abel. Da $f(x) = \log(1+x)$ in $(-1,1)$, segue, per continuitá, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.