

AM120 2010-2011: II ESONERO

TEMA 1. Sia $I \subset \mathbf{R}$ insieme aperto.

Dare la definizione di funzione analitica in I .

Indicare perché una funzione analitica in I è necessariamente $C^\infty(I)$.

Mostrare con un esempio che non tutte le funzioni $C^\infty(I)$ sono analitiche in I .

Mostrare poi che se $f \in C^\infty((a, b))$ ed esistono $M, r > 0$ tali che

$$\sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

allora f è analitica in (a, b) .

TEMA 2. Enunciare e dimostrare le formule di Eulero.

TEMA 3. Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ non negativa.

Dire cosa vuol dire che f è integrabile e che cosa è l'integrale di f .

Provare poi che se f è continua ed è nulla fuori di un intervallo allora f è integrabile.

TEMA 4. Enunciare e dimostrare la proprietà di additività dell'integrale.

Dare la definizione di integrale orientato $\int_a^b f$ e mostrare l'identità

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0 \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R}$$

TEMA 5. Sia $f \in C([a, +\infty))$ integrabile.

Provare che

$$\int_x^{+\infty} |f| \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$$

e dedurre che $\int_a^\infty |f| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x |f|$.

ESERCIZIO 1. Determinare, laddove esistono, le primitive delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = \sin^2 x, \quad g_2(x) = x \sinh x \quad g_3(x) = \frac{x-2}{x(x^2-1)}, \quad g_4(x) = 2x^2 e^{-x^2}$$

Calcolare quindi i seguenti integrali

$$I_1 = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2 x dx, \quad I_2 = \int_{-1}^2 x \sinh x dx \quad I_3 = \int_2^{\sqrt{3}} \frac{x-2}{x(x^2-1)} dx,$$

$$I'_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} [2x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}] dx$$

ESERCIZIO 2. Calcolare, se esistono, i seguenti integrali

$$I'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cos^2 x dx, \quad I'_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x} \quad I'_3 = \int_1^{+\infty} \frac{x-2}{x(x^2+1)} dx$$

ESERCIZIO 3. Sia t un parametro reale. Dire, motivando, per quali valori del parametro t i seguenti integrali esistono

$$I'_1 = \int_{\mathbf{R}} \frac{\arctan x}{t^2 + x^2} dx, \quad I'_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(t+x)^4} dx, \quad I'_3 = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos x dx$$

Calcolare, per i valori di t trovati, tali integrali.

ESERCIZIO 4. Dire, motivando, se le seguenti funzioni sono integrabili/integrabili in senso improprio su $(0, +\infty)$:

$$k(x) = \sin x^2, \quad h(x) = \frac{\arcsin(\cos x)}{1+x}$$

ESERCIZIO 5. Dire, motivando la risposta, se sono vere le seguenti formule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n}{1+n^4 x^4} dx = \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n^4 x^4} \right] dx$$

$$\int_0^4 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^{2n}} x^n \right] dx = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$