ST1- ESAME: Giugno 7 -2010 *(Orlandi)*

Esercizio 1 (10 punti) Siano $(X_1, \ldots, X_n)$ indipendenti estratti da una popolazione $N(\mu, \sigma^2)$ con μ e σ^2 incogniti. Si vuole verificare $H_0 : \sigma^2 = 1$ contro l'ipotesi $H_1 : \sigma^2 > 1$. Si calcoli la zona di rifiuto R come funzione di $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ per un test di ampiezza α usando il rapporto di verosimiglianza generalizzato.

Si dica inoltre cosa si intende per test uniformemente piú potente di ampiezza α. Il test trovato é un test uniformemente piú potente? Motivare.

Esercizio 2 (8 punti) Siano $(X_1, \ldots, X_n)$ indipendenti estratti da una popolazione con distribuzione esponenziale $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$. Si vuole stimare λ. Si stimi λ con lo stimatore

$$\hat{\lambda}_n := \frac{1}{\bar{X}}$$

con $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si definisca cosa si intende per stimatore non distorto.

Si verifichi se $\hat{\lambda}_n$ é uno stimatore distorto o non distorto di λ.

Qualora $\hat{\lambda}_n$ sia uno stimatore distorto si proponga uno stimatore non distorto. Valutare inoltre la distorsione di $\hat{\lambda}_n$ al variare di n.

Esercizio 3 (8 punti) Siano X e Y due variabili aleatorie con densita di probabilitá congiunta

$$f(x,y) = 2, \qquad 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Determinare

(1)

$$P[0 \leq X \leq \frac{1}{2}; 0 \leq Y \leq \frac{1}{2}].$$

(2) La densitá di probabilitá di X.
(3) La densitá di probabilitá di Y.
(4) La media condizionata $E[Y|x]$, con $0 \leq x \leq 1$.

Esercizio 4 (6 punti) Una bilancia pesa con un margine di errore. Si assuma che l'errore E sia una variabile aleatoria con distribuzione normale di media 0 e varianza 10^{-2} (in milligrammi).

Si assuma che i risultati di 6 pesate successive dello stesso oggetto abbiano dato valori in milligrammi di $4,08 - -3.32 - -4,10 - -4,68 - - - 3.15 - -3.14$. Determina un intervallo di confidenza per il peso dell'oggetto ad un livello di confidenza del 95%.