AM5 2010: Settimana 12

MISURE DI HAUSDORFF E FORMULE DI AREA E COAREA

Misura di Hausdorff s-dimensionale. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$, $0 \le s < \infty$, $0 < \delta$.

$$H^s_\delta(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\, C_j}{2}\right)^s : \quad A \subset \cup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\, C_j \le \delta\}$$

ove $\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$, $\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$, $0 < t < \infty$. Notare che $\alpha(n) = vol B^n$ ove B^n é la palla unitaria in $\mathbf{R}^n$.
Chiaramente $H^s_\delta(A)$ cresce al decrescere di δ e la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbf{R}^n$ é allora cosi definita:

$$H^s(A) := \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(A)$$

Si mostrano facilmente le seguenti proprietá:

Proposizione 1. Sia $0 \le s$. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$.

(i) H^s é misura metrica e quindi é misura di Borel regolare

(ii) $H^s \equiv 0$ se $s > n$.

(iii) Se $0 \le s < t$ allora $H^s(A) < \infty \Rightarrow H^t(A) = 0$

(iv) Se $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ é isometria, allora $H^s(L(A) + h) = H^s(A)\ \forall h \in \mathbf{R}^n$

(v) $H^s(rA) = r^s H^s(A)$ per ogni $r > 0$.

(vi)$f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|\ \forall x, y \ \Rightarrow\ H^s(f(A)) \le c^s H^s(A)$

(vii) $H^1 = L^1$ in $\mathbf{R}$....per provare che $H^n = L^n$ in ogni $\mathbf{R}^n$ occorre...

La diseguaglianza isodiametrica.

Tra gli insiemi aventi lo stesso diametro la palla é quello che ha maggior volume:

$$(DID) \qquad L^N(A) \le \alpha(N) \left(\frac{diam\, A}{2}\right)^N = vol\, B_{\frac{diam\, A}{2}}$$

Per provare (DID) cominciamo con l'osservare che (DID) vale banalmente se A é simmetrico rispetto all'origine: da $x \in A \Rightarrow -x \in A$ segue che $2|x| \leq diam\ A$, ovvero $A \subset B_{\frac{diam\ A}{2}}$. Per concludere la dimostrazione basterá applicare il

Lemma (di simmetrizzazione)

Per ogni $A \subset \mathbf{R}^N$ esiste A^* simmetrico (il 'simmetrizzato' di A) e tale che

$$(i)\ diam\ A^* \leq diam\ A, \qquad (ii) L^N(A^*) = L^N(A) \quad \text{se } A \text{ é misurabile}$$

Infatti, tale Lemma, applicato alla chiusura $\overline{A}$ di A, dá $\quad L^N(A) \leq$

$$\leq L^N(\overline{A}) = L^N((\overline{A})^*) \leq \alpha(N) \left(\tfrac{diam\ (\overline{A})^*}{2}\right)^N \leq \alpha(N) \left(\tfrac{diam\ \overline{A}}{2}\right)^N = \alpha(N) \left(\tfrac{diam\ A}{2}\right)^N.$$

La dimostrazione del Lemma si basa sulla **'simmetrizzazione di Steiner'** di un insieme A, che consiste in: 1) fissare un iperpiano coordinato 2) sezionare A con rette ortogonali a tale iperpiano 3) misurare ogni sezione , dando origine a intervalli aventi come lunghezza la misura di ciascuna sezione 4) sistemare ciascuno di tali intervalli, in posizione simmetrica rispetto all'iperpiano, lungo la retta che lo ha generato. In tal modo, usando Fubini, si vede che non si altera la misura dell'insieme, mentre il diametro, eventualmente, diminuirá. Tale operazione va effettuata a partire dal primo iperpiano coordinato, e ripetuta poi sul secondo fino all' N-esimo iperpiano coordinato, ottenendo alla fine l'insieme A^* avente le proprietá richieste.

Proposizione 2. $H^N \equiv L^N$ in $\mathbf{R}^N$ per ogni $N \geq 1$.

NOTA. In particolare, la misura di Lebesgue L^N é invariante per isometrie.

Prova. Sia A misurabile. Che sia $L^N(A) \leq H^N(A)$ segue subito da (DID):

$$A \subset \cup_j C_j \ \Rightarrow L^N(A) \leq \alpha(N) \sum_j \left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^N$$

Per vedere che $H^N(A) \leq L^N(A)$, notiamo intanto che $H^N(A) \leq \frac{\alpha(N) N^{\frac{N}{2}}}{2^N} L^n(A)$. Poi, se $\epsilon > 0$ e $R_j \subset \mathbf{R}^N$ sono tali che $\sum_j vol\ (R_j) \leq L^N(A) + \epsilon$, per il Lemma di Vitali si possono trovare B_k^j palle chiuse contenute nell'interno di R_j e tali che

$$diam\ B_k^j \leq \delta, \quad L^N\left(R_j \setminus \cup_k B_k^j\right) = 0 \quad \text{e quindi,} \quad H^N\left(R_j \setminus \cup_k B_k^j\right) = 0. \quad \text{Quindi}$$

$$\sum_{j,k} \alpha(N) \left(\frac{diam\ B_k^j}{2}\right)^N = \sum_{j,k} vol(B_k^j) = \sum_j L^N\left(\cup_k B_k^j\right) = \sum_j L^N(R_j) \leq L^N(A) + \epsilon$$

Jacobiano di una trasformazione lineare.

Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ (cioé L é trasformazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$). Nel seguito identificheremo L con la sua matrice rappresentativa nelle basi canoniche per $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$.
Sia $L' \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ l'operatore aggiunto di L, cioé $< x, L'y >_{\mathbf{R}^n} = < Lx, y >_{\mathbf{R}^m}$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$. Notiamo che $(L' \circ L)' = L' \circ L$ é operatore simmetrico di $\mathbf{R}^n$ in se ed é anche positivo perché $< L' \circ Lx, x >= \|Lx\|^2$.
In particolare, $det(L' \circ L) \geq 0$ e $L' \circ L$ é invertibile se e solo se esiste $\delta > 0$ tale che $\|Lx\| \geq \delta \|x\| \ \forall x \in \mathbf{R}^n$ mentre $L \circ L'$ é invertibile se e solo se L é suriettivo.
Richiamiamo dapprima alcuni utili fatti algebrici.

(i) Una mappa $O \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ é **ortogonale** se conserva il prodotto scalare:
$< Ox, Oy >_{\mathbf{R}^m} = < x, y >_{\mathbf{R}^n} \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{R}^n$ (e quindi $\|Ox\| = \|x\| \ \forall x$ ed $n \geq m$)
Poi, $\quad (O' \circ O)(x) = x \ \forall x \in \mathbf{R}^n, \qquad (O \circ O')(y) = y, \quad \|O'y\| = \|y\| \ \forall\, y \in O(\mathbf{R}^n)$.
In particolare, se $n = m$, allora $\quad O' = O^{-1} \quad$ e $\quad |det\, O| = 1$

(iii) Se $S \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ é simmetrico, cioé $S = S'$, allora S é diagonalizzabile, cioé esistono $O, D \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, O ortogonale e $D = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale (cioé $D(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$) tali che $\quad S = O \circ D \circ O'$

(iv) Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.
Se $n \leq m$, esistono $S = S' \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ e $O \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ ortogonale tali che $L = O \circ S$.
In particolare, $L' \circ L = S^2$.
Se $n \geq m$, esistono $S = S' \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ e $O \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ ortogonale tali che $L = S \circ O'$.
In particolare, $L \circ L' = S^2$.

Definizione. Si chiama Jacobiano di L il numero

$$J_L := (det(L' \circ L))^{\frac{1}{2}} \quad \text{se}\, n \leq m, \qquad J_L := (det(L \circ L'))^{\frac{1}{2}} \quad \text{se}\, n \geq m$$

Chiaramente $J_L = J_{L'}$ e, se $n \leq m$ e $L = O \circ S$ oppure $n \geq m$ e $L = S \circ O'$, $J_L = |detS|$. In particolare, se $n = m$, $J_L = |detL| = |detS|$.

La formula di Cauchy-Binet.

Siano M_j i minori di ordine massimo di L. Allora

$$J_L = \left(\sum_j (det\ M_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposizione 3: Il significato geometrico di J_L.

Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m), \quad n \leq m$. Allora

$$H^n(L(A)) = J_L\, L^n(A) \qquad \forall\, A \subset \mathbf{R}^n$$

NOTA. Se $n = m$, ritroviamo la formula $|detL| = vol(LQ)$, ove $Q = [0,1] \times \ldots \times [0,1]$ é il cubo unitario in $\mathbf{R}^n$.
Se $n < m$, la formula di Cauchy-Binet si legge allora cosí:
il quadrato dell'area di LQ é uguale alla somma dei quadrati delle aree delle proiezioni di LQ sugli spazi coordinati di dimensione n (teorema di Pitagora).

Prova. Sia $n = m$ e proviamo che $L^N(LA) = |detL|\, L^n(A) \quad \forall\, A \subset \mathbf{R}^n$.
Se $det L = 0$ é $dim L(\mathbf{R}^n) < n$ e quindi $L(\mathbf{R}^n)$ ha misura nulla. Sia dunque $det L \neq 0$.
Sia, intanto, $D(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) \quad \forall\, (x_1, \ldots, x_n),\ \lambda_j \neq 0$. Se $R = I_1 \times \ldots \times I_n$, si ha $D(R) = \lambda_1 I_1 \times \ldots \times \lambda_n I_n$. Dunque $vol\, D(R) = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| vol\, R$ ed allora

$$A \subset \cup_j R_j \Rightarrow D(A) \subset \cup_j D(R_j) \Rightarrow L^n(DA) \leq \sum_j vol\, D(R_j) = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| \sum vol\, R_j$$

$$\Rightarrow \quad L^n(DA) \leq |\lambda_1 \cdots \lambda_n| L^n(A) = |det\, D|\, L^n(A)$$

Dall'invertibilitá di D segue che vale anche la diseguaglianza opposta.
Sia ora $S = S'$. Siano λ_j gli autovalori di S e quindi $S = O \circ D \circ O'$ ove $D = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ é matrice diagonale e O é ortogonale. Si ha:

$$L^n(SA) = L^n((O \circ D \circ O')(A)) = L^n(DA) = |det\, D|\, L^n(A) = |det\, S|\, L^n(A)$$

Infine, dato L, e scrivendo $L = O \circ S$, vediamo che

$$L^n(L(A)) = H^n(S(A)) = |det\, S|\, L^n(A) = |det\, L|\, L^n(A)$$

Sia infine $n < m$.
Dato L, scriviamo $L = O \circ S$. Siccome O' é isometria tra $O(\mathbf{R}^n)$ e $\mathbf{R}^n$, si ha

$$H^n(L(A)) = H^n((O' \circ O \circ S)(A)) = H^n(S(A)) = L^n(S(A)) = |detS| L^n(A) = J_L L^n(A)$$

Definizione. Sia $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Scriveremo

$$J_\varphi(x) := J_{D\varphi(x)}$$

FORMULA DI AREA.

I) Sia $n \leq m$. Sia $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ iniettiva e tale che $J_\varphi > 0\, \forall x$. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ misurabile. Allora

$$\int_A J_\varphi(x)dx \;=\; H^n(\varphi(A))$$

II) Se $f : \mathbf{R}^m \to [-\infty, +\infty]$ é borel misurabile allora f é H^n sommabile su $\varphi(A)$ se e solo se $f \circ \varphi$ é sommabile su A e

$$\int_A f(\varphi(x))J_\varphi(x)dx \;=\; \int_{\varphi(A)} f dH^n$$

Parte I). Indichiamo i passi principali della dimostrazione.

Passo 1: misurabilitá. $A \subset \mathbf{R}^n$ misurabile $\Rightarrow \varphi(A)$ é H^n misurabile.
Se A é limitato, siano $K_j \subset A$ compatti tali che $L^n(A \setminus \cup_j K_j) = 0$. Da

$$H^n\left(\varphi(A \setminus \cup_j K_j)\right) \leq (Lip(\varphi_{|A}))^n H^n\left(A \setminus \cup_j K_j\right)) = 0$$

segue la H^n misurabilitá di $\varphi(A)$ perché $\varphi(A) = \varphi(A \setminus \cup_j K_j) \cup \varphi(\cup_j K_j)$ e $\varphi(\cup_j K_j) = \cup_j \varphi(K_j)$ é H^n-misurabile perché lo sono $\varphi(K_j)$ in quanto compatti.
Se A non é limitato, basta scrivere $\varphi(A) = \cup_k \varphi(A \cap B_k)$ ove B_k é la palla di raggio k e centro l'origine.

Passo 2: confronto col linearizzato. Sia $t \in (1, 2)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Indichiamo $L = D\varphi(x)$. Allora esiste $\epsilon(t, x)$ tale che, se $\epsilon < \epsilon(t, x)$, si ha

$$(2-t)\,|L(x_1) - L(x_2)| \leq |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq t\,|L(x_1) - L(x_2)| \quad \forall x_1, x_2 \in B_\epsilon(x) \tag{1}$$

$$t^{-n} J_L \;\leq\; J_\varphi(\xi) \;\leq\; (2-t)^{-n} J_L \qquad \forall \xi \in B_\epsilon(x) \tag{2}$$

$$(2-t)^n H^n\left(L(B_\epsilon(x) \cap A)\right) \;\leq\; H^n\left(\varphi(B_\epsilon(x) \cap A)\right) \;\leq\; t^n H^n\left(L(B_\epsilon(x) \cap A)\right) \tag{3}$$

Per provare (1), fissato $h \in \mathbf{R}^m$ con $|h| = 1$, scriviamo $\quad < \varphi(x_1) - \varphi(x_2), h >=$

$$< L(x_1 - x_2), h > + \int_0^1 < \left[D\varphi(\tau x_1 + (1-\tau)x_2) - L\right](x_1 - x_2), h > d\tau$$

Siano $\sigma(t, x)$, $\epsilon(t, x)$ tali che $\sigma(t, x)\,|\xi| \leq (t-1)\,|L\xi| \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n$ e

$$\left|\int_0^1 [< D\varphi(\tau x_1 + (1-\tau)x_2) - L](x_1 - x_2), h > d\tau\right| \leq \sigma(t,x)|x_1 - x_2| \leq$$
$\leq (t-1)\,|L(x_1) - L(x_2)|$ se $\epsilon \leq \epsilon(t,x)$ e $x_1, x_2 \in B_\epsilon(x)$. Allora
$| < \varphi(x_1) - \varphi(x_2), h > | \leq t|L(x_1 - x_2)|$ se $|h| = 1$.
Analogamente, $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \geq |L(x_1 - x_2)| - \sigma\,|x_1 - x_2| \geq (2-t)\,|L(x_1 - x_2)|$ e la prova di (1) é cosí completa. Per provare (2), basta osservare che

$$J_\varphi(\xi) = (det\,((D\varphi(\xi))' \circ D\varphi(\xi))^{\frac{1}{2}} \to_{\xi \to x} (det\,((D\varphi(x))' \circ D\varphi(x))^{\frac{1}{2}} = J_L$$

Ora, siccome $L : \mathbf{R}^n \to L(\mathbf{R}^n)$ é invertibile, indicato con L^{-1} il suo inverso possiamo scrivere $\varphi(\xi) = (\varphi \circ L^{-1})(L\xi)$. Ma, da (1),

$$|(\varphi \circ L^{-1})(y_1) - (\varphi \circ L^{-1})(y_2)| \leq t\,|y_1 - y_2|$$

cioé $\varphi \circ L^{-1}$ é Lip di costante t, e quindi

$$H^n(\varphi(B_\epsilon(x) \cap A)) = H^n((\varphi \circ L^{-1})(L(B_\epsilon(x) \cap A)) \leq t^n H^n(L(B_\epsilon(x) \cap A))$$

Analogamente, prendendo $x_i = \varphi^{-1}(y_i)$ in (1), deduciamo che

$$(2-t)\,|L(\varphi^{-1}(y_1) - \varphi^{-1}(y_2))| \leq\ |y_1 - y_2|$$

cioé $L \circ \varphi^{-1}$ é lipschitziana di costante $(2-t)^{-1}$, e quindi

$$H^n(L(B_\epsilon(x) \cap A)) = H^n(L \circ \varphi^{-1}(\varphi(B_\epsilon(x) \cap A)) \leq (2-t)^{-n} H^n(\varphi(B_\epsilon(x) \cap A))$$

Passo 3: conclusione. Sia $t \in (1,2)$. Dal passo (2) segue che la famiglia $\mathcal{V}$ di palle chiuse $B_\epsilon(x)$, $x \in A$ tali che valgano (1) e (2) e (3) é un ricoprimento di Vitali di A. Supposto dapprima che A sia limitato, sia $B_j \in \mathcal{V}$ famiglia disgiunta tale che $L^n(A \setminus (\cup_j B_j)) = 0$ e quindi $L^n(A) = L^n(\cup_j A \cap B_j)$ e quindi

$$\int_A J_\varphi(x)dx = \sum_j \int_{A \cap B_j} J_\varphi(x)dx$$

Poi, detto x_j il centro di $B_j \in \mathcal{V}$, dalla (3), dalla Prop. 3 e infine dalla (2) segue che

$$t^{-2n} H^n(\varphi(B_j \cap A)) \leq t^{-n} H^n(D\varphi(x_j)(B_j \cap A)) = t^{-n} J_\varphi(x_j)\, L^n(B_j \cap A) \leq$$

$$\leq \int_{A \cap B_j} J_\varphi(x)dx \leq$$

$$\leq (2-t)^{-n} J_\varphi(x_j) L^n(B_j \cap A) = (2-t)^{-n} H^n(D\varphi(x_j)(B_j \cap A)) \leq (2-t)^{-2n} H^n(\varphi(B_j \cap A)$$

Ma $H^n(\varphi(A)) = H^n(\varphi(A \cap [\cup_j B_j]) + H^n(\varphi(A \setminus [\cup B_j])) = H^n(\varphi(A \cap [\cup_j B_j])$, e quindi, sommando in j, troviamo

$$t^{-2n} H^n(\varphi(A)) \leq \int\limits_A J_\varphi(x)dx \leq (2-t)^{-2n} H^n(\varphi(A)) \qquad t \in (1,2)$$

Mandando t a 1^+, troviamo appunto $\quad H^n(\varphi(A)) = \int\limits_A J_\varphi(x)dx$.
Per concludere, posto $A_R := A \cap B_R$, da $\quad H^n(\varphi(A_R)) = \int\limits_{A_R} J_\varphi(x)dx \quad$ si ottiene, mandando R all'infinito, $\quad H^n(\varphi(A)) = \int\limits_A J_\varphi(x)dx$.

Parte II). Intanto, f boreliana, φ continua $\Rightarrow f \circ \varphi$ boreliana. Infatti, indicata con $\mathcal{B}^k$ la classe dei boreliani in $\mathbf{R}^k$ si ha che $\{E \subset \mathbf{R}^m : \quad \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{B}^n\}$ é, come si vede facilmente, una σ-algebra che, contenendo gli aperti di $\mathbf{R}^m$, contiene $\mathcal{B}^m$.
Sia $f \geq 0$ borel misurabile, e quindi f si scrive $f = \sum\limits_j \frac{1}{j}\chi_{E_j}$ per certi boreliani E_j. Allora

$$(f \circ \varphi)(x) = \sum_j \frac{\chi_{E_j}(\varphi(x))}{j} = \sum_j \frac{\chi_{\varphi^{-1}(E_j)}(x)}{j} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_A (f \circ \varphi)(x) J_\varphi(x)dx =$$

$$\sum_j \frac{1}{j} \int \chi_{A \cap \varphi^{-1}(E_j)} J_\varphi \;=\; \sum_j \frac{1}{j} H^n(\varphi(A) \cap E_j) \;=\; \int\limits_{\varphi(A)} \sum_j \frac{1}{j} \chi E_j dH^n \;=\; \int\limits_{\varphi(A)} f dH^n$$

Scrivendo $f = f^+ - f^-$ si deduce il risultato per f.

NOTA. Usando un teorema (di Rademacher) che assicura che le funzioni Lipschitziane sono differenziabili q.o. e raffinando gli argomenti sopra utilizzati si puó provare (vedi Evans-Gariepy) che la formula di area continua vale in sole ipotesi di Lipscitzianitá e di iniettivitá. Si puó addirittura eliminare l'ipotesi di iniettivitá, purché l'area di $\varphi(A)$ venga calcolata tenendo conto delle eventuali sovrapposizioni.

ESEMPI.

1. Sia $\gamma \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ curva parametrica in $\mathbf{R}^n$, cioé γ é iniettiva e $J_\gamma = \|\dot\gamma(t)\| > 0 \forall t$. Sia $f : \mathbf{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ borel misurabile. Allora, se $A \subset \mathbf{R}$ é misurabile,

$$\int\limits_{\gamma(A)} f dH^1 = \int\limits_A f(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\| dt$$

é l'integrale di f sulla 'curva' $\gamma(A)$.

2. Sia $X \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$, $\quad X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ 'superfice parametrica' in $\mathbf{R}^3$, cioé X é iniettiva e $J_X(u,v) > 0$ per ogni (u,v).
I vettori $X_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $X_v = (x_v, y_v, z_v)$ generano lo spazio tangente alla superfice nel punto $X(u,v)$. La normale alla superfice é data dal vettore $\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$ ove $X_u \wedge X_v = (y_u z_v - z_u y_v, -(x_u z_v - z_u x_v), x_u y_v - x_u y_v)$. Quindi $\|X_u \wedge X_v\| = J_X$ cioé la lunghezza di $X_u \wedge X_v$ uguaglia l'area del parallelogramma generato da X_u, X_v: $\|X_u \wedge X_v\| du\, dv$ é l'elemento d'area sulla superfice. Per la formula di area, se A é un sottoinsieme misurabile di Ω allora

$$\int_A \|X_u \wedge X_v\| du\, dv = H^2(X(A))$$

é l'area della porzione di 'superfice' $X(A)$.

3. Se M é n-varietá immersa in $\mathbf{R}^m$ e $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}^m$, Ω aperto in $\mathbf{R}^n$ é una carta locale per M, allora $J_\varphi(x) dx_1 \dots dx_n$ é, in coordinate locali, 'elemento di volume' della superfice. É

$$[D\varphi(x)]' \circ D\varphi(x) = (g_{ij}), \qquad = g_{ij} =< \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} >, \quad i,j = 1, \dots, n$$

Se $g := det\,(g_{ij})$ e quindi $J_\varphi(x) = det([D\varphi(x)]' \circ D\varphi(x))^{\frac{1}{2}} = g^{\frac{1}{2}}$, ed $E \subset \varphi(\mathbf{R}^n)$ é boreliano, allora

$$H^n(E) = vol(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} g^{\frac{1}{2}} dx$$

4. Sia $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, iniettiva e tale che $J_\varphi(x) = \left| det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} \right| > 0$ per ogni x. Sia f sommabile, A misurabile. Allora

$$\int_A f(\varphi(x)) \left| det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right| dx = \int_{\varphi(A)} f dy$$

LA FORMULA DI COAREA.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ con $n > m$. In tal caso hanno rilevanza geometrica gli insiemi di livello $f^{-1}(y)$, $y \in \mathbf{R}^m$ ed il modo in cui fogliano un dato insieme A: $A = \cup_y [A \cap \{f = y\}]$. Ricordiamo che $f^{-1}(y)$ é varietá di dimensione $n - m$ se nei suoi punti la matrice Jacobiana $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n}$ ha rango massimo (Teorema del Dini).
Se $m = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla f(x)$ e un insieme di livello $f^{-1}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, é 'ipersuperfice' se $|\nabla f(x)| \neq 0 \quad \forall x \in f^{-1}(t)$. Dato $A \subset \mathbf{R}^n$, risulta ovviamente $A = \cup_t \{f = t\}$.

Nel caso lineare, cioé $f(x) =< h, x >$ e quindi $\nabla f(x) \equiv h$, gli insiemi di livello sono iperpiani affini $\{x : < x, h >= t\}$ ortogonali alla retta $\mathbf{R}h$. Se $|h| = 1$, il Teorema di Fubini dá

$$\int_{\mathbf{R}} H^{n-1}(A \cap \{< h, x >= t\})dt = L^n(A)$$

Se $|h| \neq 1$ ed effettuando il cambio di variabile $\frac{t}{|h|} = s$ troviamo

$$\int\limits_{\mathbf{R}} H^{n-1}(A \cap \{< h, x >= t\})dt = |h| \int_{\mathbf{R}} H^{n-1}(A \cap \{< \frac{h}{|h|}, x >= s\})ds = |h|L^n(A)$$

che possiamo anche scrivere come

$$\int\limits_A |\nabla f(x)|dx = \int_{\mathbf{R}} H^{n-1}(A \cap \{f = t\})dt$$

Notiamo che $|\nabla f| = [det\,(Df \circ (Df)')]^{\frac{1}{2}}$. Vediamo quindi che, di nuovo, un oggetto analiticamente rilevante é dato da

$$J_f(x) := J_{(Df)'} \ = \ [det\,(Df(x) \circ (Df(x))')]^{\frac{1}{2}}$$

(nota che $det\,([Df(x)]' \circ Df(x)) \equiv 0$) e dal suo integrale su A. Si ha in effetti

Teorema (formula di coarea).

Sia $n \geq m$. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ misurabile. Allora

$$\int\limits_A J_f(x)dx \ = \int\limits_{\mathbf{R}^m} H^{n-m}(A \cap \{f = y\})dy = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left[\int\limits_{\{f=y\}} \chi_A dH^{n-m} \right] dy$$

Se poi g é sommabile in $\mathbf{R}^n$, allora

$$\int\limits_A g(x)\ J_f(x)dx \ = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left[\int\limits_{\{f=y\}} g\,dH^{n-m} \right] dy$$

ESEMPIO (integrazione in coordinate polari). Sia $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sommabile. Allora

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} g\,dx \ = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{|x|=r} g\,dH^{n-1} \right) dr$$

Basta applicare la formula di coarea con $f(x) = \frac{x}{|x|}$, giacché $J_f(x) = 1$ per ogni $x \neq 0$.