AM5 2010: Tracce delle lezioni- 9

DISEGUAGLIANZE DI CONVOLUZIONE

Abbiamo visto come Fubini-Tonelli implichi la seguente diseguaglianza di convoluzione

$$\|g*h\|_1 \le \|g\|_1\,\|h\|_1 \qquad \forall g,h\in L^1 \qquad (Y1)$$

Piú in generale,

$$g\in L^1,\quad h\in L^r \quad\Rightarrow\quad g*h\in L^r \quad \text{e} \quad \|g*h\|_r \le \|g\|_1\,\|h\|_r \qquad (Yr)$$

giacché $\quad [\int_{\mathbf{R}^N}(\int_{\mathbf{R}^N}|g(x-y)h(y)|dy))^r\,dx]^{\frac{1}{r}} =$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|g(x-y)|^{\frac{1}{r}}|g(x-y)|^{\frac{1}{p}}|h(y)|dy\right)^r dx\right]^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|g(x-y)||h(y)|^r dy\right)\left(\int_{\mathbf{R}^N}|g(x-y)|dy\right)^{\frac{r}{p}} dx\right]^{\frac{1}{r}} \le \|g\|_1^{\frac{1}{r}}\|h\|_r\|g\|_1^{\frac{1}{p}}$$

Stabiliamo ora una diseguaglianza dello stesso tipo quando $g\in L^q, h\in L^r$, con $q,r\ge 1$ qualsiasi.

DISEGUAGLIANZA DI YOUNG

Siano $\quad p>1, \quad q,r\ge 1, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2.$ $\qquad$ *Allora*

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,(g*h)(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} f(x)\,g(x-y)\,h(y)\,dxdy\right|$$

$$\le\ \|f\|_p\,\|g\|_q\,\|h\|_r \qquad (Y)$$

per ogni $f\in L^p,\ g\in L^q,\ h\in L^r$. *In particolare, se* $\quad \frac{1}{s} := \frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1$, *allora*

$$g\in L^q(\mathbf{R}^n),\quad h\in L^r(\mathbf{R}^n) \quad\Rightarrow\quad g*h\in L^s \quad \text{e} \quad \|g*h\|_s \le \|g\|_q\ \|h\|_r$$

Prova. $\quad$ Se $q=r=1$ e quindi $p=\infty$, la diseguaglianza (Y) si riduce alla (Y1):

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} f(x)\,g(x-y)\,h(y)\,dxdy\right| \le \|f\|_\infty\,\|g*h\|_1 \le\ \|f\|_\infty\,\|g\|_1\,\|h\|_1$$

Se $q = 1$ e $r > 1$, allora p e r sono esponenti coniugati, e quindi la diseguaglianza (Y) si deduce dalla (Yr) via Holder.

Caso generale: $q, r > 1$. Se p', q', r' sono gli esponenti coniugati, allora

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1$$

Dalla diseguaglianza di Holder generalizzata e quindi Fubini

$$|\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(x)g(x-y)h(y)dxdy| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x)|^{\frac{p}{r'}} \times |f(x)|^{\frac{p}{q'}} \times |g(x-y)|^{\frac{q}{p'}} \times |g(x-y)|^{\frac{q}{r'}} \times |h(y)|^{\frac{r}{p'}} \times |h(y)|^{\frac{r}{q'}} dxdy \leq$$

$$\leq \Big(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x)|^p |g(x-y)|^q dxdy\Big)^{\frac{1}{r'}} \times \Big(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x)|^p |h(y)|^r dxdy\Big)^{\frac{1}{q'}} \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |h(y)|^r |g(x-y)|^q dxdy\Big)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$\|f\|_p^{\frac{p}{r'}} \ \|g\|_q^{\frac{q}{r'}} \ \|f\|_p^{\frac{p}{q'}} \ \|h\|_r^{\frac{r}{q'}} \ \|h\|_r^{\frac{r}{p'}} \ \|g\|_q^{\frac{q}{p'}} = \|f\|_p \ \|g\|_q \ \|h\|_r$$

NOTA. La condizione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$ é necessaria, in quanto la diseguaglianza deve essere invariante rispetto al cambio di scala $x' = tx, y' = ty$: il primo membro cambia per un fattore t^{-2n}, mentre il secondo cambia per un fattore $t^{-n(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})}$.

Il caso limite: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ (e quindi $p = 1$). Siano $q, r > 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Allora

$$g \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad h * g \in C(\mathbf{R}^n) \quad \text{e} \quad \sup_{|x| \geq R} |h * g|(x) \to_{R \to +\infty} 0$$

Intanto, $\int |g(x-y)|\,|h(y)|dy \leq \|g\|_q \,\|h\|_r \quad \forall x$. Siano poi $g_\epsilon, h_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tali che $\|g - g_\epsilon\|_q + \|h_\epsilon - h\|_r \leq \epsilon$. Da Holder

$$|(g * h)(x) - (g_\epsilon * h_\epsilon)(x)| \leq |[(g - g_\epsilon) * h](x)| + |[g_\epsilon * (h - h_\epsilon)](x)| \leq$$

$$\leq \|g - g_\epsilon\|_q \,\|h\|_r + \|h - h_\epsilon\|_r \,\|g_\epsilon\|_q \leq 2\epsilon(\|g\|_q + \|h\|_r)$$

Dunque $g_\epsilon * h_\epsilon \to_{\epsilon \to 0} g * h$, uniformemente e siccome $g_\epsilon * h_\epsilon$ é chiaramente C_0^∞, allora $g * h$ é continua. Infine, che $g * h$ vada uniformemente a zero all'infinito segue di nuovo dal fatto che $g * h$ é limite uniforme di funzioni a supporto compatto.

NOTA Se, nel caso limite, $q = 1$ e $r = \infty$, allora, di nuovo, $g * h$ é definita e continua, ma non decade, in generale, all'infinito (prendi ad esempio $h \equiv 1$).

Effetto regolarizzante della convoluzione

Sia $\int_{\mathbf{R}^n} |f| < \infty$. Allora

(i) $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \Rightarrow f * g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}$

(ii) $\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp}\ f + \mathrm{supp}\ g$ $\quad$ ($\mathrm{supp}\ f :=$ chiusura di $\{x : \ f(x) \neq 0\}$)

Basta mostrare, usando Lebesgue, che é lecita la derivazione sotto segno di integrale.

Nuclei regolarizzanti. Sia $0 \leq \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) ::= \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int |\varphi_\epsilon * f - f|^p \rightarrow_{\epsilon \to 0} 0 \quad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

Segue da $\int_{\mathbf{R}^n} |\varphi_\epsilon * f - f|^p(x)\, dx = \int | \int [f(x) - f(x-y)](\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{p}} (\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{q}}\, dy|^p\, dx$

$$\leq \int \left(\int |f(x) - f(x-y)|^p \varphi_\epsilon(y) dy \right) \left(\int |\varphi_\epsilon(y)| dy \right) dx =$$

$$\int \left(\varphi(z) \int |f(x) - f(x - \epsilon z)|^p dx \right) dz \rightarrow_{\epsilon \to 0} 0 \quad \text{(convergenza dominata)}$$

Approssimazione mediante convoluzione. Siccome $f * \varphi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, abbiamo ottenuto che

ogni f sommabile é limite in media di funzioni C^∞
In effetti ogni f sommabile é limite in media di funzioni C_0^∞

Basta infatti prendere $\quad f\, \chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon$:

$$\int | f\, \chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon - f| \leq \int |(f\, \chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} - f) * \varphi_\epsilon| + \int |f * \varphi_\epsilon - f| \to 0$$

perché $\quad \int |f - f\, \chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}}| = \int_{|x| \geq \frac{1}{\epsilon}} |f| \to 0 \quad$ al tendere di ϵ a zero.

COMPATTEZZA IN $L^p(\mathbf{R}^N)$: IL TEOREMA DI FRECHET- KOLMOGOROV

Sia $p \geq 1$. Non é in generale vero che una successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^N)$ ammette sottosuccessioni convergenti in L^p. Cioé, non é vero in generale che

$$f_n \in L^p(\mathbf{R}^N), \ \sup_n \|f_n\|_{L^p} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists f_{n_k} \quad \text{convergente in} \quad L^p$$

Ad esempio, se $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $f_n(x) := f_n(x + h_n)$, $|h_n| \to_n +\infty$, allora $f_n(x) \to_n 0 \ \ \forall x \in \mathbf{R}^N$ ma f_n non ha estratte convergenti (necessariamente a zero) in L^p perché $\|f_n\|_p \equiv \|f\|_p$. Analogamente , $f_n(x) := \epsilon_n^{\frac{N}{p}} f(\epsilon_n x)$, $\epsilon_n \to_n 0$ ha norma L^p costante e quindi non ha estratte convergenti a $f \equiv 0$ che é il limite puntuale delle f_n.

Al fine di individuare delle condizioni che assicurino la compattezza di f_n in L^p, cominciamo con l'osservare che

$$\int |f_n - f|^p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int |f_n|^p < +\infty \quad \text{e}$$

$$\sup_n \int |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h|\to 0} 0 \qquad\qquad \sup_n \int_{|x|\geq r} |f_n|^p \to_{r\to+\infty} 0$$

La validitá di tali proprietá per ciascuna f_n é ben nota: il fatto che tali proprietá valgano uniformemente in n é facile conseguenza della convergenza L^p delle f_n. É sotto tali condizioni che una data f_n ha una estratta convergente in L^p.

Teorema (Frechet-Kolmogorov) . Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ aperto. Siano f_n misurabili in $L^p(\mathbf{R}^N)$ e tali che

(i) $\forall K \subset \Omega$ compatto $\exists c(K)$: $$\sup_n \int_K |f_n|^p \leq c(K)$$

(ii) $\forall K \subset \Omega$ compatto $$\sup_n \int_K |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h|\to 0} 0$$

Allora esistono f ed f_{n_k} tali che $\int_K |f_{n_k} - f|^p \to_k 0 \ \ \forall \ \ \forall K \subset \Omega$ compatto . Se di piú

(iii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \ K_\epsilon \subset \Omega$ compatto e tale che $$\sup_n \int_{\Omega\setminus K_\epsilon} |f_n|^p \leq \epsilon$$

allora f_n ha una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$.

Prova. Sia, per semplicitá, $p = 1$. Nel seguito supporremo, come é lecito, che $f_n \equiv 0$ fuori di Ω. Il seguente Lemma descrive il ruolo delle ipotesi (i)-(ii).

Lemma . Sia $\varphi \in C_0^\infty(B_1),\ 0 \le \varphi \le 1,\ \int_{\mathbf{R}^N} \varphi = 1,\ \ \varphi_\epsilon = \epsilon^{-N}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Sia $K \subset \Omega$ compatto, $\epsilon < dist(K, \partial\Omega)$. Allora

$$(i) \quad \Rightarrow \quad \exists c = c_e : \ \sup_{x\in K} |(f_n * \varphi_\epsilon)(x)| + \sum_{j=1}^{N} \left[\sup_{x\in K} |\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_\epsilon * f_n)(x)|\right] \le c_\epsilon \quad \forall n$$

$$(ii) \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int_K |f_n - (\varphi_\epsilon * f_n)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

Prova del Lemma.

Sia $K^\epsilon := \{z = x + y : \quad x \in K, \quad |y| \le \epsilon\}$. Da $c(K^\epsilon) := \sup_n \int_{K^\epsilon} |f_n| < +\infty$ segue

$$|(\varphi_\epsilon * f_n)(x)| \le \|\varphi_\epsilon\|_\infty \int_{|y|\le\epsilon} |f_n(x-y)|\, dy \le c(K^\epsilon)\, \|\varphi_\epsilon\|_\infty \qquad \forall x \in K$$

$$|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * f_n)(x)| = \left| \int_{\mathbf{R}^N} f_n(y)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_\epsilon(x-y)\, dy \right| \le c(K^\epsilon)\, \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\|_\infty \quad \forall x \in K$$

Poi, $\sup_n \int_K |f_n(x+h) - f_n(x)|\, dx \to_{|h|\to 0} 0 \quad \Rightarrow$

$$\int_K |f_n(x) - (\varphi_\epsilon * f_n)(x)| \le \int_K \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x)| \varphi_\epsilon(x)\, dy\right) dx =$$

$$\int_K \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)| \varphi(z)\, dz\right) dx =$$

$$= \int_{|z|\le 1} \left(\varphi(z) \int_K |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)|\, dx\right) dz \to_{\epsilon\to 0} 0$$

PROVA di F-K.

Sia $\Omega_h,\ h \in \mathbf{N}$ famiglia crescente di sottoinsiemi aperti limitati di Ω tali che

$$K_h := \overline{\Omega}_h \subset \Omega, \quad dist(K_h, \partial\Omega) > \frac{1}{h}, \quad \cup_h \Omega_h = \Omega$$

Proviamo che

$$\exists n_k : \quad \int_{K_h} |f_{n_k} - f_{n_h}| \le \frac{1}{h} \qquad \forall k \ge h$$

Dalla seconda parte del Lemma segue che

$$\forall h,\ \exists \epsilon_h < \frac{1}{h} : \qquad \sup_n \int_{K_h} |f_n - (\varphi_h * f_n)| \leq \frac{1}{h} \qquad (\varphi_h := \varphi_{\epsilon_h})$$

Dalla prima parte del Lemma segue che, per ogni ϵ, la successione $n \to \varphi_\epsilon * f_n$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzela su ogni compatto K in Ω tale che $dist(K, \partial\Omega) > \epsilon$. Esiste quindi una selezione di indici n_j^1 tale che $\varphi_1 * f_{n_j^1}$ converge uniformemente (e quindi in media) in K_1. Possiamo quindi supporre che

$$\int_{K_1} |\varphi_1 * f_{n_i^1} - \varphi_1 * f_{n_j^1}| \leq 1 \qquad \forall i, j$$

Per la stessa ragione, esiste una (ulteriore) selezione di indici $(n_j^2) \subset (n_j^1)$ tale che

$$\int_{K_2} |\varphi_2 * f_{n_i^2} - \varphi_2 * f_{n_j^2}| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall i, j$$

Iterando, troviamo, al passo h una (ulteriore) selezione di indici $(n_j^h) \subset (n_j^{h-1})$ tali che

$$\int_{K_h} |\varphi_h * f_{n_i^h} - \varphi_h * f_{n_j^h}| \leq \frac{1}{h} \quad \forall i, j$$

Ma allora, indicata $n_h := n_h^h$, troviamo che

$$k \geq h \quad \Rightarrow \quad \int_{K_h} |f_{n_k} - f_{n_h}| \leq$$

$$\leq \int_{K_h} |f_{n_k} - \varphi_h * f_{n_k}| + \int_{K_h} |\varphi_h * f_{n_k} - \varphi_h * f_{n_h}| + \int_{K_h} |\varphi_h * f_{n_h} - f_{n_h}| \leq \frac{3}{h}$$

Siccome, fissato $K \subset \Omega$ compatto, $K \subset K_h$ per h grande, si ha che f_{n_k} é di Cauchy in $L^1(K)$ e quindi esiste f misurabile in Ω tale che $\int_K |f_{n_k} - f| \to_k 0$.

Per provare la seconda parte del teorema basta osservare che

$$\exists K_\epsilon : \qquad \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f| \leq \liminf_j \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f_{n_j}| \leq \epsilon \qquad \Rightarrow$$

$$\limsup_j \int_\Omega |f_{n_j} - f| \leq \limsup_j \int_{K_\epsilon} |f_{n_j} - f| + \limsup_j \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f_{n_j} - f| \leq 2\,\epsilon$$

CONVOLUZIONE CON NUCLEI SINGOLARI
e
DISEGUAGLIANZA HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV

Dato $\lambda \in (0, N)$, scriveremo $G_\lambda(x) := \frac{1}{|x|^\lambda}$.

Chiaramente G_λ non appartiene ad alcun $L^p(\mathbf{R}^N)$. Tuttavia G_λ ha proprietá di sommabilita locale. Ad esempio $\int\limits_{|x|\leq R} \frac{dx}{|x|^\lambda} = \frac{N\, vol(B_1)}{N-\lambda}\, R^{N-\lambda}$. Ció comporta, in particolare, che se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, allora

$$(\varphi * G_\lambda)(x) := \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^\lambda}\, dy = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\varphi(x-y)}{|y|^\lambda}\, dy$$

é definita per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ ed é infatti una funzione $C^\infty(\mathbf{R}^N)$. La convoluzione con nuclei G_λ si estende a tutte le funzioni sommabili, come si vede dalla seguente **diseguaglianza Hardy-Littlewood-Sobolev**:

fissati $p, r > 1$ *tali che* $\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{r} = 2$, *esiste* $c = c(\lambda, N, p)$ *tale che*

$$\left| \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \frac{h(x)\ f(y)}{|x-y|^\lambda}\, dxdy \right| \leq c \quad \|h\|_r \ \|f\|_p$$

per ogni $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, $h \in L^r(\mathbf{R}^N)$. *In particolare, posto* $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{p} - 1$, *(ovvero* s *é l'esponente coniugato di* r*), allora*

$$\exists c > 0 : \qquad \|G_\lambda * f\|_s \leq c\, \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^N)$$

In altre parole, l'applicazione $f \to G_\lambda * f$ é ben definita per ogni funzione $L^p, p > 1$ e $Lf := G_\lambda * f$ é infatti lineare e continuo da L^p in L^s, $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{p} - 1$.

NOTA La relazione sopra indicata tra i parametri λ, p, r, N é necessaria perché una siffatta diseguaglianza possa valere, e ció per il suo carattere di invarianza rispetto ai cambi di scala.

La dimostrazione di H-L-S é proposta in Appendice.

APPENDICE: una dimostrazione di H-L-S.

Data $f \geq 0$ misurabile in $\mathbf{R}^N$, sia

$$\chi_f := \chi_{\Gamma_f}, \quad \Gamma_f := \{(x,t) \in \mathbf{R}^N \times [0,+\infty] : \quad 0 \leq t < f(x)\}$$

Chiaramente Γ_f e quindi χ_f sono misurabili e

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \chi_f(x,t)dt \quad \forall x \in \mathbf{R}^N, \quad \int_{\mathbf{R}^N} f = \int_0^{+\infty} |(f > t)|dt$$

ove abbiamo indicato con $|(f > t)|$ la misura dell'insieme $(f > t) := \{x \in \mathbf{R}^N : f(x) > t\}$ (la seconda uguaglianza deriva da Fubini). Analogamente

$$f^p(x) = p\int_0^{f^p(x)} s^{p-1}ds = p\int_0^{+\infty} \chi_f(x,s)s^{p-1}ds \ , \quad \int_{\mathbf{R}^N} f^p = p\int_0^{+\infty} |(f > s)|s^{p-1}ds$$

Infine, effettuando il cambio di variabile $t = \frac{1}{\tau^\lambda}$, vediamo che

$$\frac{1}{|x|^\lambda} = \int_0^{\frac{1}{|x|^\lambda}} dt = \lambda\int_{|x|}^{+\infty} \tau^{-\lambda-1}ds = \lambda\int_0^{+\infty} \chi_{\{|x|<\tau\}}\tau^{-\lambda-1}d\tau \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$$

Prova di (HLS). Dividendo per $\|f\|_p \ \|h\|_r$, (HLS) si riscrive

$$c(N,\lambda,p) \ := \ \sup\{\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \frac{h(x) \ f(y)}{|x-y|^\lambda} \, dx \, dy : \quad f,h \geq 0, \|f\|_p = 1 = \|h\|_r\} < +\infty$$

Si tratta cioé di provare che esiste $c = c(N,\lambda,p) > 0$ tale che

$$p\int_0^{+\infty} |(f > t)|t^{p-1}ds = \int_{\mathbf{R}^N} f^p = 1 = \int_{\mathbf{R}^N} h^r = r\int_0^{+\infty} |(h > s)|s^{r-1}ds \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \left[\left(\int_0^{+\infty} \chi_f(y,t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} \chi_h(x,s)ds\right)\left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{|x-y|<\tau\}}\tau^{-\lambda-1}d\tau\right)\right] dx \, dy \leq c$$

ovvero, usando Fubini, che $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}} dtdsd\tau \leq c$

ove si é posto $I(t,s,\tau) := \int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \chi_f(x,t) \ \chi_h(y,s) \ \chi_{\{|x-y|<\tau\}} \, dx \, dy$.
Osserviamo che

$$\chi_{\{|x-y|<\tau\}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad I \ \leq \ |(f > t)| \ |(h > s)|$$

$$\chi_h \le 1 \quad \Rightarrow \qquad I \le volB_\tau\, |(f>t)| = c_N\ \tau^N |(f>t)|$$
$$\chi_f \le 1 \quad \Rightarrow \qquad I \le volB_\tau\, |(h>s)| = c_N\ \tau^N\, |(h>s)|$$
$$\Rightarrow \qquad I \le \frac{c_N\,\tau^N\, |(f>t)|\ |(h>s)|}{\max\{c_N\,\tau^N,\ |(f>t)|,\ |(h>s)|\}}$$

Sostituendo τ con $c_N^{\frac{1}{N}}\ \tau$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}\,dt\,ds\,d\tau \le$$
$$\le c_N^{\frac{\lambda}{N}} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\tau^{\lambda+1}}\frac{\tau^N\, |(f>t)|\ |(h>s)|}{\max\{\ \tau^N,\ |(f>t)|,\ |(h>s)|\}}\,d\tau\right)\ ds\,dt$$

Passo 1 Per ogni s,t si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau \le \frac{N\,c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}\ \min\{|(h>s)|\ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}},\ |(f>t)|\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\}$$

Infatti, se $\quad |(h>s)| \le |(f>t)|, \quad$ allora

$$\frac{\tau^N\, |(f>t)|\ |(h>s)|}{\max\{\ \tau^N,\ |(f>t)|,\ |(h>s)|\}} \le \frac{\tau^N\, |(f>t)|\ |(h>s)|}{\max\{\tau^N,\ |(f>t)|\}}$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}d\tau \le c_N^{\frac{\lambda}{N}}\left[\int_0^{|(f>t)|^{\frac{1}{N}}} \frac{\tau^N\ |(h>s)|}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau + \int_{|(f>t)|^{\frac{1}{N}}}^{\infty} \frac{|(f>t)|\ |(h>s)|}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau\right]$$
$$= \frac{c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{N-\lambda}\,|(h>s)|\ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} + \frac{c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda}\,|(h>s)|\ |(f>t)|^{1-\frac{\lambda}{N}} =$$
$$= \frac{Nc_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}|(h>s)|\ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \le \frac{Nc_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}|(f>t)|\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}$$

Scambiando h ed f, si ottiene

$$|(h>s)| \ge |(f>t)| \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}d\tau \le \frac{Nc_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}|(f>t)|\,|(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \le$$
$$\le \frac{Nc_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}\ |(h>s)|\ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}$$

Dal Passo 1 otteniamo

$$\forall T > 0 : \qquad \frac{\lambda(N-\lambda)}{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}} \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \frac{h(x)\ f(y)}{|x-y|^\lambda} dxdy \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \left(|(h>s)| \int_0^T \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \ dt \right) ds + \int_0^\infty \left(\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \int_T^\infty |(f>t)| \ dt \right) ds$$

$$\textit{Ora,} \quad \int_0^T \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \ dt = \int_0^T \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} t^{(p-1)\frac{N-\lambda}{N}} \ t^{-(p-1)\frac{N-\lambda}{N}} \ dt \ \leq$$

$$\leq \ \left(\int_0^\infty |(f>t)| t^{p-1} \ dt \right)^{\frac{N-\lambda}{N}} \ \left(\int_0^T t^{-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}} \ dt \right)^{\frac{\lambda}{N}} \ =$$

$$= \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{N-\lambda}{N}} \left[\frac{T^{[1-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}]}}{1-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}} \right]^{\frac{\lambda}{N}} \ = \ c(\lambda, N, p) T^{(r-1)\frac{p}{r}} \quad \text{perché} \quad \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{r} = 2 \ \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{N} - (p-1)\frac{N-\lambda}{N} = 1 - p + \frac{p\lambda}{N} = 2p - \frac{p}{r} - p = (r-1)\ \frac{p}{r}$$

Dunque, prendendo $\quad T = s^{\frac{r}{p}}, \quad$ vediamo che

$$p \int_0^{+\infty} |(f>t)| t^{p-1} ds = 1 = r \int_0^{+\infty} |(h>s)| s^{r-1} ds \qquad \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \left(|(h>s)| \int_0^{s^{\frac{r}{p}}} \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \ dt \right) \ ds \ \leq$$

$$\leq \ c(N, \lambda, p) \ \int_0^\infty \ |(h>s)| \ \ s^{r-1} \ ds \ = \ \frac{c(N, \lambda, p)}{r}$$

Analoga limitazione per il secondo integrale: usando Fubini e poi Holder,

$$\int_0^\infty \left(\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \int_{s^{\frac{r}{p}}}^\infty |(f>t)| \ dt \right) ds = \int_0^\infty \left(\ |(f>t)| \int_0^{t^{\frac{p}{r}}} \ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \ ds \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\ |(f>t)| \int_0^{t^{\frac{p}{r}}} \ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} s^{(r-1)\frac{N-\lambda}{N}} \ s^{-(r-1)\frac{N-\lambda}{N}} \ ds \right) \ dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \ \ |(f>t)| \left(\int_0^\infty |(h>s)| s^{r-1} \ ds \right)^{\frac{N-\lambda}{N}} \ \left(\int_0^{t^{\frac{p}{r}}} \ \ s^{-(r-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}} \ ds \right)^{\frac{\lambda}{N}} \ dt \ =$$

$$c(\lambda, N, p, r) \int_0^\infty \ \ |(f>t)| \ \ t^{[\frac{\lambda}{N}-(r-1)\frac{N-\lambda}{N}]\frac{p}{r}} \ dt \ = \ c(\lambda, N, p, r) \ \int_0^\infty \ \ |(f>t)| \ \ t^{p-1} \ dt.$$

AM5: Esercizi e Problemi- 8

Problema 1. Sia $0 \le \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int_{B_R} |\varphi_\epsilon * f - f\,|^p \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \forall f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n), \quad \forall R > 0$$

ove $f \in L^p_{loc} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{|x|\le R} |f|^p < +\infty \quad \forall R > 0$.

Problema 2. Sia f continua in $\mathbf{R}^n$, $\varphi \in C_0^\infty$. Provare che

(i) $f * \varphi(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy$ é definita in tutto $\mathbf{R}^n$ ed é una funzione C^∞.

(ii) $f * \varphi_\epsilon$ converge uniformemente sui compatti ad f.

Problema 3. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$\int |f(x) - \frac{1}{L^n(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)dy\,|\,dx \;\to_{r\to 0} 0$$

Problema 4 Sia $f \in C(\mathbf{R}^N)$. Provare che

$$f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N): \quad \sup_{x\in\mathbf{R}^N} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to+\infty} 0$$

Esercizio 1. Sia $\alpha \in [0,1)$. Sia $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\chi_{(0,1]}$.

Provare che $f * f$ é continua sse $\alpha < \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Posto $f_n = f\,\chi_{\{|f(x)|\le n\}}$, provare che

$$\int |g| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int |f_n * g - f * g| \to_n 0$$

Esercizio 3. Stabilire se é vero che

$$f \in C(\mathbf{R}^n),\ \varphi \in C_0^\infty \quad \Rightarrow \quad x \to \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\,g(y)dy \qquad \text{é sommabile}$$

AM5: Esercizi e Problemi- 8

CENNI DI SOLUZIONE

Problema 2. Sia $supp\ \varphi \subset B_1$, $|x| \le R$. Allora

$$|(\varphi_\epsilon * f)(x) - f(x)| \le \int |f(x) - f(x-y)|\varphi_\epsilon(y)\, dy =$$

$$\int \left(\varphi(z) \int |f(x) - f(x-\epsilon z)|dx\right) dz \le$$

$$\le \sup_{x,y \in B_{R+1},\ |x-y|\le\epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

per la uniforme continuitá di f in B_{R+1}.

Problema 3. $\int |f(x) - \frac{1}{volB_r}\int_{B_r(x)} f(y)dy|dx\,| \le$

$$\le \frac{1}{r^N volB_1}\int \left(\int |f(x) - f(y)|\chi_{B_r(x)}(y)\, dy\right) dx =$$

$$\frac{1}{r^N volB_1}\int \left(\int |\, f(x) - f(x-z))|\, \chi_{B_1}(\frac{z}{r})\, dz\right) dx =$$

$$= \frac{1}{r^N volB_1}\int \left(\int |f(x) - f(x-r\xi)|\, \chi_{B_1}(\xi)\, r^N\, d\xi\right) dx =$$

$$= \frac{1}{volB_1}\int \left(\chi_{B_1}(\xi)\int |\, f(x) - f(x-r\xi)\,|dx\right) d\xi \to_{r\to 0} 0$$

perché $\int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \to_{r\to 0} 0$ e c ' é equidominatezza:

$$\chi_{B_1}(\xi)\int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \le 2\|f\|_{L^1}\ \chi_{B_1}(\xi)$$

Problema 4.

$f \in C(\mathbf{R}^N)$, $f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0$ $\Rightarrow$ f é uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}^N$

e quindi, esattamente come nel Problema 2 si vede che ora

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |(\varphi_\epsilon * f)(x)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

Sia ora $\chi_n := \chi_{|x|\le n}$. É

$\varphi_\epsilon * (f\chi_n) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $|(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f(\chi_n - 1))(x)| \le \sup_{|y|\ge n} |f(y)| \le \epsilon$ se $n \ge n_\epsilon$

e quindi, per $n \geq n_\epsilon$, si ha

$|(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f\chi_n))(x) - f(x)| \leq |(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f(\chi_n - 1))(x)| + |(\varphi_{\frac{1}{n}} * f)(x) - f(x)| \, leq\epsilon \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$

Il viceversa é ovvio:

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon, \quad supp \quad f_{n_\epsilon} \subset B_{R_\epsilon}, \quad |x| \geq R_\epsilon \quad \Rightarrow$$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon$$

Esercizio 1. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ allora $f \in L^2$ e quindi $f * f$ é continua:

$$|(f*f)(x+h) - (f*f)(x)| \leq \int |f(x+h-y) - f(x-y)| \, |f(y)| \, dy \leq$$

$$\leq \|f\|_2 \left(\int |f(x+h-y) - f(x-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \to_{h\to 0} 0$$

Per discutere il caso $\alpha \geq \frac{1}{2}$, calcoliamo esplicitamente $f * f$.

$$x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_{(0,1]}(y)\, \chi_{(0,1]}(x-y) = \chi_{(0,1]\cap[x-1,x)}(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = 0$$

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^\alpha y^\alpha} = \frac{1}{x^{2\alpha}} \int_0^x \frac{dy}{(1-\frac{y}{x})^\alpha \, (\frac{y}{x})^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha \, t^\alpha} \to_{x\to 0^+} +\infty \quad \text{se} \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

mentre

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \quad \text{se} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Dunque $f * f$ é discontinua in $x = 0$ se $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Questo é in effetti l'unico punto di discontinuitá:

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_{1-\frac{1}{x}}^{1} \frac{dt}{(1-t)^\alpha \, t^\alpha}$$

che é evidentemente continua.