

AM5 2010: Tracce delle lezioni- 7

IL TEOREMA DI RADON-NIKODYM

Sia $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ sigma algebra ; siano $\nu, \mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ misure, rispettivamente finita, σ -finita. Allora $\exists f \in L^1(X, \mu), \exists Z \in \Sigma$ con $\mu(Z) = 0$ tali che

$$\nu(E) = \int_E f d\mu + \nu(E \cap Z) \quad \forall E \in \Sigma$$

Prova. Se $\lambda(E) := \mu(E) + \nu(E), E \in \Sigma,$ λ é misura σ -finita in Σ e, per ogni φ semplice e non negativa, $\int \varphi d\lambda = \int \varphi d\mu + \int \varphi d\nu$ e quindi, per ogni h Σ -misurabile

$$\int |h| d\lambda = \int |h| d\mu + \int |h| d\nu \quad \int |h| d\lambda \geq \int |h| d\mu, \quad \int |h| d\lambda \geq \int |h| d\nu$$

In particolare, $L^1(\lambda) \subset L^1(\nu)$ e $h \rightarrow \int h d\nu$ é continuo in $L^1(\lambda)$ e quindi

$$(*) \quad \exists g \in L^\infty(\lambda) : \int h d\nu = \int g h d\lambda \quad \forall h \in L^1(\lambda)$$

Inoltre, $\lambda(E) > 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\lambda(E)} \int_E g d\lambda = \frac{1}{\lambda(E)} \int \chi_E d\nu = \frac{\nu(E)}{\lambda(E)} \leq 1 \Rightarrow$

$$0 \leq g \leq 1 \quad \lambda - q.o. \quad \text{e quindi si puó supporre} \quad g(x) \in [0, 1] \quad \forall x$$

Iteriamo ora (*):

$$(**) \quad \int h d\nu = \int g h d\lambda = \int g h d\mu + \int g^2 h d\lambda = \int (g + g^2) h d\mu + \int g^2 h d\nu \\ = \dots = \int (g + g^2 + \dots + g^n) h d\mu + \int g^n h d\nu \quad \forall h \in L^1(\lambda)$$

In particolare, presa $h \equiv 1$ in (**), vediamo che

$$\nu(X) \geq \int \left(\sum_n g^n \right) d\mu \quad \text{e quindi} \quad \sum_n g^n(x) < +\infty \quad \mu - q.o. \quad \text{e} \quad \mu(\{g = 1\}) = 0$$

Quindi $f := \sum_{n=1}^{\infty} g^n \in L^1(\mu)$ e, se $Z := \{g = 1\}, \mu(Z) = 0$.

Fissata quindi in (**) h limitata e misurabile, passando al limite troviamo, per Lebesgue,

$$\int h d\nu = \int f h d\mu + \int_Z h d\nu$$

**Misure assolutamente continue
misure singolari e Teorema di decomposizione di Lebesgue.**

Siano μ, ν misure (σ -finita, finita) definite sulla σ -algebra $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$:

$\nu \ll \mu$ (ν é **assolutamente continua** rispetto a μ) se

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$$

ν é **singolare** rispetto a μ ($\nu \perp \mu$) se

$$\exists Z \in \Sigma : \quad \mu(Z) = 0 \quad \text{e} \quad \nu(Z^c) = 0$$

(Lebesgue) $\exists \nu_{ac} \ll \mu, \nu_s \perp \mu$ *unicamente determinate* tali che $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$

Che tale decomposizione esista segue dal Teorema di Radon-Nikodym:

$$\exists h \in L^1_\mu, \quad Z \in \Sigma, \quad \mu(Z) = 0 : \quad \nu(E) = \int_E h d\mu + \nu(Z \cap E) = \nu_{ac}(E) + \nu_s(E)$$

$$\nu_{ac}(E) := \int_E h d\mu, \quad \nu_s(E) := \nu(Z \cap E)$$

L'unicità é poi facile da verificare.

IL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ

Sia l funzionale lineare su $C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $l(\varphi) \geq 0$ se $\varphi \geq 0$. Allora

$$\exists \mu \text{ misura di Radon tale che } \quad l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

Prova. Sia

$$\mu(\Omega) := \sup\{l(\varphi) : \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N), 0 \leq \varphi \leq 1, \text{supp } \varphi \subset \Omega\}, \quad \forall \Omega \subset \mathbf{R}^N, \text{ aperto}$$

$$\mu(A) := \inf\{\mu(\Omega) : A \subset \Omega \quad \Omega \subset \mathbf{R}^N \text{ aperto}\}$$

Passo 1. μ é misura (ovvero, é numerabilmente subadditiva)

Passo 2. μ é misura di Radon (ovvero é Borel regolare, finita sui compatti)

Passo 3. $l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

Prova passo 1. Siano $\Omega \subset \cup_j \Omega_j$ aperti, $K := \text{supp } \varphi \subset \Omega$. Siccome K é compatto, esiste n tale che $K \subset \cup_{j=1}^n \Omega_j$. Sia ψ_j partizione dell'unitá:

$$0 \leq \psi_j \leq 1, \quad \text{supp } \psi_j \subset \Omega_j, \quad \sum_{j=1}^n \psi_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

Allora

$$l(\varphi) = l\left(\sum_{j=1}^n \psi_j \varphi\right) = \sum_{j=1}^n l(\psi_j \varphi) \leq \sum_{j=1}^n \mu(\Omega_j) \quad (\text{perché } \text{supp } \psi_j \subset \Omega_j)$$

e quindi $\mu(\Omega) \leq \sum_j \mu(\Omega_j)$. Sia ora $A \subset \cup_i A_i$. Possiamo supporre $\mu(A_i) < +\infty \quad \forall i$. Sia $A_i \subset \Omega_i$ e

$$\mu(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \geq \mu(\Omega_i)$$

Allora $\epsilon + \sum_i \mu(A_i) \geq \sum_i \mu(\Omega_i) \geq \mu(A)$.

Prova passo 2. Proviamo che μ é misura metrica.

Se $\Omega_i, i = 1, 2$ sono aperti disgiunti e $\text{supp } \varphi_i \subset \Omega_i, \quad 0 \leq \varphi_i \leq 1$ allora $\text{supp } [\varphi_1 + \varphi_2] \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ e $0 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq 1$ e quindi

$$l(\varphi_1) + l(\varphi_2) = l(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2) \quad \text{e quindi} \quad \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) \leq \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

Allora, se $d(A_1, A_2) > 0$, esistono Ω_i aperti disgiunti tali che $A_i \subset \Omega_j$ e quindi, se $A_1 \cup A_2 \subset \Omega$ aperto, risulta

$$\mu(\Omega) \geq \mu([\Omega \cap \Omega_1] \cup [\Omega \cap \Omega_2]) = \mu(\Omega \cap \Omega_1) + \mu(\Omega \cap \Omega_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Passando all'inf: $\mu(A_1 \cup A_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$ e quindi μ é misura metrica e quindi boreliana.

Poi, μ é Borel regolare, perché se $\mu(A) < +\infty$,

$$\mu(A) = \mu(\cap \Omega_j) \quad \text{ove} \quad \mu(A) + \frac{1}{j} \geq \mu(\Omega_j)$$

Infine, $\mu(B_r) < +\infty \quad \forall r > 0$. Infatti, se $\psi \in C_0(B_{2r}), \quad \psi \equiv 1$ su B_r , allora

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad \text{supp } \varphi \subset B_r \quad \Rightarrow \quad l(\varphi) \leq l(\psi) \quad \Rightarrow \quad \mu(B_r) \leq l(\psi)$$

Prova passo 3. Sia $K := \text{supp } \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$. Fissato $\epsilon > 0$, siano

$$t_0 < \inf \varphi < t_1 \dots < t_n = \sup \varphi \quad \text{tali che} \quad t_j - t_{j-1} < \epsilon \quad \forall j$$

e siano

$$E_j := \varphi^{-1}((t_{j-1}, t_j]) \cap K \subset \Omega_j : \quad \mu(\Omega_j) \leq \mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}, \quad \varphi(x) \leq t_j + \epsilon \quad \forall x \in \Omega_j, \quad \forall j$$

Notiamo che gli E_j sono disgiunti e $K = \cup_j E_j$. Sia ψ_j partizione dell'unit :

$$0 \leq \psi_j \leq 1, \quad \text{supp } \psi_j \subset \Omega_j, \quad \sum_j \psi_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

e quindi $\varphi \equiv \sum_j \varphi \psi_j$. Ora,

$$t_j - \epsilon < t_{j-1} < \varphi(x) \quad \forall x \in E_j, \quad \psi_j \varphi \leq (t_j + \epsilon) \psi_j \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} l(\varphi) &= \sum_{j=1}^n l(\varphi \psi_j) \leq \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon) l(\psi_j) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon) \mu(\Omega_j) \leq \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon) \left[\mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon) \mu(E_j) + \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon) \frac{\epsilon}{n} = \sum_{j=1}^n (t_j - \epsilon) \mu(E_j) + 2\epsilon \mu(K) + \epsilon(\text{sup } \varphi + \epsilon) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \varphi d\mu + \epsilon[2\mu(K) + \text{sup } \varphi + \epsilon] = \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu + \epsilon[2\mu(K) + \text{sup } \varphi + \epsilon] \end{aligned}$$

Ma   anche $l(-\varphi) \leq \int_{\mathbf{R}^N} [-\varphi] d\mu$, e quindi $l(\varphi) = \int \varphi d\mu$.

NOTA. Esattamente come per la misura di Lebesgue si vede che

$$\forall E \text{ boreliano} \quad \mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compatto}\}$$

Ci  comporta l'**unicit  di μ** :

se $l(\varphi) = \int \varphi d\nu = \int \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, allora, dato un compatto K e preso un aperto Ω contenente K e tale che $\nu(K) + \epsilon \geq \nu(\Omega)$, e presa una $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $0 \leq \varphi \leq 1$, $\text{supp } \varphi \subset \Omega$, $\varphi \equiv 1$ su K si ha

$$\mu(K) = \int_K d\mu \leq \int \varphi d\mu = l(\varphi) = \int_K d\nu \leq \nu(\Omega) \leq \nu(K) + \epsilon$$

Convergenza debole e compattezza per misure di Radon

Definizione. Siano μ_n misure di Radon in \mathbf{R}^N . Diremo che

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \quad (\text{converge debolmente a } \mu) \quad \text{se} \quad \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu_n \rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

Esempio. (i) Siano $0 \leq f_n$, $f_n \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $\mu_n(E) := \int_E |f_n| dx$, E boreliano. Allora $\mu_n \rightharpoonup \mu \Leftrightarrow \int_{\mathbf{R}^N} f_n \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu$, $\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

(ii) Sia $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\int |f| = 1$, $f_n(x) := n^N |f(nx)|$, $\mu_n(E) := \int_E f_n dx$. Allora $\mu_n \rightharpoonup \delta_0$, ove $\delta_0(E) = 1$ se $0 \in E$ e $\delta_0(E) = 0$ se $0 \notin E$.

Teorema Siano μ_n misure di Radon tali che $\sup_n \mu_n(B_R) < +\infty \quad \forall R$. Allora

$$\exists n_k, \mu : \quad \mu_{n_k} \rightharpoonup_k \mu$$

Prova. Dal Teorema di approssimazione di Weierstrass segue che esiste un insieme numerabile $D \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ tale che

$$\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N), \quad \exists R > 0, \quad \exists \varphi_n \in D \cap C_0(B_R) \quad \text{tale che} \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \rightarrow_n 0$$

Dall'ipotesi segue che $\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, $\sup_n \left| \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu_n \right| < +\infty$ e quindi l'argomento diagonale di Cantor assicura che

$$\exists \mu_{n_k} : \quad l(\varphi) := \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu_{n_k} \quad \text{esiste finito} \quad \forall \varphi \in \langle D \rangle$$

e, ovviamente, l é lineare e positivo e quindi

$$\forall R > 0, \quad \exists c_R : \quad |l(\varphi)| \leq c_R \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in C_0(B_R)$$

Ciò implica che, se $\varphi_n \in C_0(B_R) \cap \langle D \rangle$, $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \rightarrow_n 0$ allora $\lim_n l(\varphi_n)$ esiste finito e dipende solo da φ , ovvero l si estende a un funzionale lineare e positivo su $C_0(\mathbf{R}^N)$. In virtù del Teorema di Riesz esiste una misura di Radon μ tale che

$$l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu = \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu_{n_k} \quad \forall \varphi \in \langle D \rangle$$

Da ciò segue facilmente che la convergenza ha infatti luogo su tutto $C_0(\mathbf{R}^N)$.

Esercizi e problemi 6

Esercizio 1. Provare che l^∞ non é separabile. Trovare una successione $l_n \in (l^\infty)'$ limitata, che non ha estratte debolmente* convergenti.

Esercizio 2. Sia $c_0 := \{x \in l^\infty : x(j) \rightarrow_j 0\}$.

(i) Provare che c_0 é sottospazio lineare chiuso di l^∞ e che

$$\forall a \in l^\infty, \quad \exists a_n \in c_0 : \quad a_n \rightharpoonup^* a$$

(non é in particolare vero che $x_n \in C \subset l^\infty$ chiuso e convesso, $x_n \rightharpoonup^* x$ in $l^\infty \Rightarrow x \in C$).

(ii) Sia $h \in l^1$. Posto $l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h x = \sum_j h(j) x(j) \quad \forall x \in c_0$, provare che $Lh := l_h$ é una isometria lineare suriettiva di l^1 su $(c_0)'$ (l^1 é il duale di c_0 ...ma c_0 non é il duale di l^1 !).

(iii) Mostrare con un esempio che non tutte le successioni limitate in c_0 hanno estratte debolmente convergenti.

Esercizio 3. Provare che

$$x_n \in l^1, \quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\|_1 \rightarrow_n 0$$

Esercizio 4. Sia f misurabile. Provare che

$$(i) \quad \sup_{p \geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^\infty$$

$$(ii) \quad f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1 \text{ e } \|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty$$

Esercizio 5. Sia $l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\nu$, ν misura di Radon.

Supponiamo che l si prolunghi a tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$ in un funzionale della forma $\int_{\mathbf{R}^N} \varphi f dx$ con $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Provare che ν é assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

CENNI DI SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia $A := \{x : \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1\}\} = 2^{\mathbf{N}}$. Come noto, A non é numerabile (ha la potenza del continuo). Siccome

$$x, y \in A, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x - y\|_{\infty} = 1$$

esiste in l^{∞} una famiglia non numerabile di palle disgiunte: un insieme denso in l^{∞} , dovendo intersecare ciascuna di tali palle, non può dunque essere numerabile.

Sia $l_n(x) := x(n) \quad \forall x \in l^{\infty}$. É

$$|l_n(x)| = |x(n)| \leq \sup_j |x(j)| = \|x\|_{\infty} \quad \text{e quindi} \quad \|l_n\| = 1$$

(infatti, se $e_n(j) := 0$ se $j \neq n$ e $e_n(n) := 1$, allora $l_n(e_n) = 1$).

Siccome $l_{n_k} \rightarrow^* l \Leftrightarrow x(n_k) = l_{n_k}(x) \rightarrow l(x)$ implica, in particolare, che $x(n_k)$ converge, tale l non può esistere perché, quale che sia la selezione n_k esiste una successione limitata x tale che la $k \rightarrow x(n_k)$ non converga.

Esercizio 2. (i) Chiaramente,

$$x_n(j) \rightarrow_j 0 \quad \forall n, \quad \sup_j |x_n(j) - x(j)| \rightarrow_n 0 \quad \Rightarrow$$

$$|x(j)| \leq |x(j) - x_n(j)| + |x_n(j)| \leq 2\epsilon$$

se $n = n_{\epsilon}$ é abbastanza grande e $j \geq j(n_{\epsilon})$, ovvero $x \in c_0$ e quindi c_0 é chiuso in l^{∞} .

Ricordiamo qui che, pensato \mathbf{N} munito della misura che conta, i corrispondenti L^p si indicano l^p . In particolare, l^{∞} é il duale di l^1 :

$$\forall h \in l^{\infty}, \quad l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h x = \sum_{j=1}^{\infty} h(j) x(j) \quad \forall x \in l^1, \quad \text{e} \quad Lh := l_h$$

é isometria lineare suriettiva di l^{∞} su $(l^1)'$.

Esempio: se

$b_n := \chi_{\{1, \dots, n\}}$, $b_n \in c_0$ e $l_{b_n}(x) := \int_{\mathbf{N}} b_n x = \sum_{j=1}^n x(j) \quad \forall x \in l^1$. Si ha

$l_{b_n}(x) \rightarrow_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j) = \int_{\mathbf{N}} x = l_{\chi_{\mathbf{N}}}$ ovvero $b_n \rightarrow^* \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. Più in generale,

$\forall a \in \mathbf{N}$ e posto $a_n := a b_n$, risulta

$$l_{a_n}(x) = \sum_j x(j) a_n(j) = \sum_{j=1}^n x(j) a(j) \rightarrow_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j) a(j) = l_a(x) \quad \forall x \in l^1$$

ovvero $a_n \rightharpoonup^* a$ in l^∞ .

(ii) Se, per $h \in l^1$, $Lh := l_h$, $l_h(x) := \sum_j h(j) x(j)$, Lh é funzionale lineare e continuo su l^∞ e quindi anche su c_0 con $\|l_h\| = \|h\|_1$ perché $|l_h(x)| \leq \|x\|_\infty \sum_j |h(j)|$ e, viceversa, posto $x_n(j) := \text{sign } h(j) b_n(j)$ risulta $x_n \in c_0$, $\|x_n\|_\infty = 1$ e quindi $\|l_h\| \geq l_h(x_n) = \sum_{j=1}^n |h(j)| \quad \forall n$.

Suriettività di L . Sia $l \in (c_0)'$ e, posto $e_n := \chi_{\{n\}} \in c_0$, sia $h := (l(e_j))_{j \in \mathbf{N}}$. Intanto, $h \in l^1$, perché $\sum_{j=1}^n |h(j)| =$

$$l\left(\sum_{j=1}^n \text{sign } h(j) e_j\right) \leq \|l\| \left\| \sum_{j=1}^n \text{sign } h(j) e_j \right\|_\infty \leq \|l\| \Rightarrow \sum_{j=1}^\infty |h(j)| \leq \|l\| < \infty$$

Infine $\|x - b_n x\|_\infty = \sup_{j \geq n+1} |x(j)| \rightarrow_n 0 \quad \forall x \in c_0 \Rightarrow$

$$l(x) = \lim_n l(x b_n) = \lim_n \left[\sum_{j=1}^n l(x(j) e_j) \right] = \sum_{j=1}^\infty x(j) l(e_j) = l_h(x)$$

(iii) Come in (ii): $b_n := \chi_{\{1, \dots, n\}} \rightharpoonup^* \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. In particolare, $l_{b_n}(e_j) \rightarrow_n 1 \quad \forall j$.

Esercizio 3. Per assurdo (passando eventualmente ad una sottosuccessione)

$\exists x_n \rightarrow 0$ in l^1 tale che $\|x_n\|_1 \geq \delta > 0$, e quindi, sostituendo x_n con $\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$

$$\exists x_n \rightarrow 0 \quad \text{con} \quad \|x_n\|_1 = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Da $x_n \rightarrow 0$ ovvero $\sum_j x_n(j) a(j) \rightarrow_n 0 \quad \forall a \in l^\infty$ segue, prendendo $a = \chi_{\{i\}}$,

$$x_n(i) \rightarrow_n 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

Quindi, per ogni fissato $m \in \mathbf{N}$, $\sum_{j>m} |x_n(j)| > \frac{3}{4} \quad \forall n \geq n_m$

Siano poi $k_1 < l_1$ tali che $\sum_{j=k_1}^{l_1} |x_1(j)| \geq \frac{3}{4}$.

Detto $n_1 = 1$, sia n_2 tale che se $k_2 > l_1$ ed $l_2 > k_2$ é abbastanza grande risulti

$$\sum_{j=k_2}^{l_2} |x_{n_2}(j)| \geq \frac{3}{4}$$

Iterando, si costruisce una sottosuccessione x_{n_i} tale che, se $k_i > l_{i-1}$ ed l_i é abbastanza grande risulti

$$\forall i \in \mathbf{N} : \quad \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| \geq \frac{3}{4} \quad \text{e quindi} \quad \sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)| \leq \frac{1}{4}$$

Se $a(j) = \text{sign } x_{n_i}(j) \quad \forall j = k_i, \dots, l_i$, é $a \in l^\infty$ e quindi $\sum_j x_{n_i}(j) a(j) \rightarrow_i 0$

$$\text{mentre} \quad \sum_j x_{n_i}(j) a(j) \geq \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| - \left[\sum_{j < k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j > l_i} |x_{n_i}(j)| \right] \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

contraddizione.

Esercizio 4. (i) Sia $\mu(\{x : |f(x)| \geq c\}) > 0$. Allora

$$\begin{aligned} \sup_{p \geq 1} \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\int_{\{x: |f(x)| \geq c\}} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq c \mu(\{x : |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \sup_{p \geq 1} \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \\ &\geq c \limsup_{p \rightarrow +\infty} \mu(\{x : |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} = c \Rightarrow \mu(\{x : |f(x)| \geq c\}) = 0 \end{aligned}$$

se $c > \sup_{p \geq 1} \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\|f\|_\infty \leq \sup_{p \geq 1} \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$$(ii) \quad p > 1 \Rightarrow \int |f|^p = \int |f| |f|^{p-1} \leq \|f\|_1 \|f\|_\infty^{p-1}$$

$$\Rightarrow \|f\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \Rightarrow \limsup_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Poi, $c < \|f\|_\infty \Rightarrow \mu(\{x : |f(x)| \geq c\}) > 0$ ed allora

$$\|f\|_p \geq c \mu(\{x : |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \geq c \Rightarrow \liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

Esercizio 5. $l(\varphi) := \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\nu$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ é

funzionale lineare e continuo su $C_0(\mathbf{R}^N)$, sottospazio lineare di $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$

(dx indichi la misura di Lebesgue in \mathbf{R}^N ; notiamo che nella classe delle funzioni uguali q.o. a una $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, φ é l'unico rappresentante continuo).

Per Hahn-Banach, l ha un prolungamento lineare e continuo su tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$.

Supponiamo esista $g \in L^1 : l(f) = \int g f$, $\forall f \in L^\infty$. Allora, se E boreliano di misura (di Lebesgue) nulla, si ha che

χ_E é limite q.o. di una successione $\varphi_n \in C_0(\mathbf{R}^N)$, con $\chi_E \leq \varphi_n(x) \leq 1 \quad \forall x$ e quindi

$$l(\varphi_n) = \int \varphi_n g \rightarrow_n \int \chi_E g = 0$$

(per il Teorema di Lebesgue). Ció implica

$$\int \chi_E \, d\nu \leq \underline{\lim}_n \int \varphi_n \, d\nu = \underline{\lim}_n l(\varphi_n) = \underline{\lim}_n \int \varphi_n g = 0$$