# AM5 2010: Settimana 5

## SPAZI $L^p$: COMPATTEZZA DEBOLE E DUALITÁ

Sia $\mu$ misura su $X$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $\|.\|_p$ indicherá la norma in $L^p(X, \mu)$.

**Uniforme limitatezza**

$$h_n \in L^p, \quad \sup_n |\int h_n g| < +\infty \quad \forall g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|h_n\|_p < +\infty$$

Prova. Equivalentemente,

$$h_n \in L^p, \quad \sup_n \|h_n\|_p = +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists g \in L^q : \quad \sup_n |\int h_n g| = +\infty$$

Passando ad una sottosuccessione, possiamo supporre che $\|h_n\|_p \geq 4^n$, e quindi

$$f_n := \frac{h_n}{\|h_n\|_p} 4^n \quad \text{soddisfa} \quad \|f_n\|_p = 4^n, \quad \sup_n |\int f_n\, g| < +\infty \quad \forall g \in L^q$$

Sia $g_n := \frac{|f_n|^{p-2} f_n}{\|f_n\|_p^{p-1}}$. Si ha $\int |g_n|^q = 1$ e $\int f_n g_n = \|f_n\|_p = 4^n$. Poi

$$|\sigma_j| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \| \sum_n^{n+m} \frac{\sigma_j}{3^j} g_j \|_q \leq \sum_n^{n+m} \frac{1}{3^j} \to_n 0 \quad \forall m \quad \Rightarrow$$

$$\hat{g} := \sum_1^\infty \frac{\sigma_j}{3^j} g_j \in L^q \qquad \text{e} \qquad |\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j| \leq \sum_{j>n} \frac{4^n}{3^j} = \frac{1}{2} (\frac{4}{3})^n \quad \forall n$$

Ora, i numeri $\sigma_j$ si possono sciegliere in modo che $|\int f_n \hat{g}| \to +\infty$. Basta prendere

$$\sigma_1 := 1 \quad \text{e, induttivamente,} \quad \sigma_n := sign \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j \right) \qquad (\text{ sign } 0 := 1)$$

perché, con tale scelta , risulta

$$|\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j| = |\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j + \frac{\sigma_n}{3^n} \int f_n\, g_n| \geq (\frac{1}{3})^n \int f_n\, g_n = (\frac{4}{3})^n$$

Quindi $|\int f_n\, \hat{g}| = |\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n g_j + \sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n g_j| \quad \geq$

$$\geq \left| |\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j| - |\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j| \right| \geq \frac{1}{2} (\frac{4}{3})^n \to +\infty$$

**Definizione di convergenza debole in $L^p$.** Sia $f_n \in L^p$ :

$$f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f_n\, g\, d\mu \to \int f\, g\, d\mu \quad \forall\ g \in L^q$$

**Proposizione**.

(i) $\|f_n - f\|_p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p$ (ma non viceversa)
(ii) $f_n \rightharpoonup_n f,\ g_n \rightharpoonup_n g,$ in $L^p,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha f_n + \beta g_n \rightharpoonup_n \alpha f + \beta g$ in $L^p$
(iii) $f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|f_n\|_p < +\infty$ e $\liminf \|f_n\|_p \geq \|f\|_p$
(iv) $f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p,\ g_n \to g$ in $L^q \quad \Rightarrow \quad \int f_n\, g_n \to_n \int f\, g$
(v) $\overline{< g_i >} = L^q,\ \int f_n\, g_j \to_n 0 \quad \forall j,\ \sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n 0$ in $L^p$

Prova. (i) $|\int (f_n - f)\, g| \leq \|f_n - f\|_p\, \|g\|_q \to_n 0 \quad \forall\ g \in L^q$ (ii) ovvia

(iii) $|\int f_n\, g| \leq \|f_n\|_p\, \|g\|_q \ \Rightarrow\ |\int f\, g| \leq (\liminf_n \|f_n\|_p)\, \|g\|_q \quad \forall\ g \in L^q \ \Rightarrow$

$$\int |f|^p \ = \ |\int f\, (|f|^{p-2}\, f)| \ \leq \ \liminf_n \|f_n\|_p \, \|\, |f|^{p-1}\, \|_q = \liminf_n \|f_n\|_p\, (\int |f|^p)^{\frac{1}{q}}$$

(iv) $\sup_n \|f_n|_p < +\infty \ \Rightarrow$

$$|\int (f_n g_n - f g)| \leq |\int (f_n - f) g| + |\int (g_n - g) f_n| \leq |\int (f_n - f) g| + \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q \to_n 0$$

(v) É $\int f_n\, g \to_n 0 \quad \forall g \in < g_j >$. Dato $g \in L^q$, siano $h_j \in < g_j >$ tali che $\|h_j - g\|_q \to_j 0$. Allora

$$|\int f_n g| \leq |\int f_n h_j| + \int |f_n| |h_j - g| \qquad \Rightarrow \qquad \limsup_n |\int f_n g| \leq \|h_j - g\|_q \sup_n \|f_n\|_p \quad \forall j$$

e quindi $\limsup_n |\int f_n\, g| = 0$.

## DISEGUAGLIANZA DI HANNER

$$1 \leq p \leq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\ \|f\|_p - \|g\|_p\ |^p \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$$

$$p \geq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\ \|f\|_p - \|g\|_p\ |^p \geq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$$

Se $p = 1$ si tratta della diseguaglianza triangolare. Se $p = 2$ ritroviamo la regola del parallelogramma. Nel seguito useremo anche la ( equivalente ) variante

$$1 \leq p \leq 2 \ \Rightarrow\ (\|f+g\|_p + \|f-g\|_p)^p + |\ \|f+g\|_p - \|f-g\|_p\ |^p \leq 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

$$p \geq 2 \ \Rightarrow\ (\|f+g\|_p + \|f-g\|_p)^p + |\ \|f+g\|_p - \|f-g\|_p\ |^p \geq 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

**Proiezione su un convesso**. *Sia* $p > 1$, $C \subset L^p$ *chiuso e convesso.*

*Allora* $\forall h \in L^p$, $\exists h_C \in C:$ $\|h - h_C\| \le \|h - g\|$ $\forall g \in C$.

*Inoltre* $0 \le \int |h - h_C|^{p-2}(h - h_C)\,(h_C - g)$ $\forall g \in C$

**Prova.** Sia $f_n \in C$ minimizzante: $\|f_n - h\| \to_n d := \inf_{g\in C} \|h - g\|$.
Basta provare che $f_n$ é di Cauchy, perché allora

$\exists\ h_C \in C = \overline{C}$ tale che $\|f_n - h_C\| \to_n 0$ e quindi $\|h - h_C\| = d$. Proviamo che

**Hanner** $\Rightarrow$ $f_n$ **é di Cauchy.**

Prenderemo, nella diseguaglianza di Hanner, $f = f_n - h$, $g = f_m - h$.
**Caso** $1 < p \le 2$. Usando la variante, vediamo che

$$\left(2\|h - \frac{f_n + f_m}{2}\|_p + \|f_n - f_m\|_p\right)^p + \left|2\|h - \frac{f_n + f_m}{2}\|_p - \|f_n - f_m\|_p\right|^p \le$$

$$\le 2^p\left[\|f_n - f\|_p^p + \|f_m - f\|_p^p\right] \le 2^{p+1}d^p + \circ(1)$$

e quindi $\|h - \frac{f_n+f_m}{2}\|_p \ge d$ $\Rightarrow$ $2^p d^p\left(1 + p\frac{\|f_n-f_m\|_p}{2d}\right) \le (2d + \|f_n - f_m\|_p)^p \le$
$\le 2^{p+1}d^p + \circ(1)$ $\Rightarrow$ $\|f_n - f_m\|_p \le \frac{2d}{p} + \circ(1) < \frac{2d}{p}$ $\Rightarrow$

$$(2d + \|f_n - f_m\|_p)^p + (2d - \|f_n - f_m\|_p)^p \le 2^{p+1}d^p + \circ(1)$$

e quindi, posto $\phi(t) := \frac{(1+t)^p+(1-t)^p}{2}$, $\phi(\frac{\|f_n-f_m\|_p}{2d}) \le 1 + \circ(1)$.
Siccome $\phi'(t) > 0\ \forall t \in (0,1]$ concludiamo che $\|f_n - f_m\|_p \to 0$ per $n, m \to +\infty$.
**Caso** $p \ge 2$.
$(2d + \circ(1))^p + \circ(1) = (\|f_n - h\|_p + \|f_m - h\|_p)^p + |\|f_n - h\|_p - \|f_m - h\|_p|^p$

$\ge \|f_n - f_m\|_p^p + \|f_n + f_m - 2f\|_p^p \ge \|f_n - f_m\|_p^p + 2^p d^p$ $\Rightarrow$ $\circ(1) \ge \|f_n - f_m\|_p^p$

Infine, $\varphi_g(t) := \int |h - [tg + (1-t)h_C]|^p \ge \int |h - h_C|^p = \varphi_g(0)$ $\forall g \in C$, $\forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow$ $0 \le \varphi_g'(0) = \int |h - h_C|^{p-2}(h - h_C)\,(h_C - g)$ $\forall g \in C$.

**Corollario** . Sia $V = \overline{V} \subset L^p$ sottospazio lineare. Allora

$\forall f \in L^p$, $\exists f_V \in V:$ $\int |f - f_V|^{p-2}(f - f_V)v = 0$ $\forall v \in V$ e $\|f - f_V\| \le \|f\|$

Prova. Segue da $\int |f - f_V|^{p-2}\,(f - f_V)(f_V - v) \ge 0$ $\forall v \in V$ e dal fatto che $0 \in V$.

**Teorema ( IL DUALE DI $L^p$ é $L^q$)**

*Sia* $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. *Allora* $(L^p)'$ **é isometricamente isomorfo a** $L^q$.

**Prova.** Se $g \in L^q$, allora $l_g(f) := \int f\, g$ é definito in $L^p$ per la diseguaglianza di Holder, ed é un funzionale lineare e continuo:

$$|l_g(f)| \leq \|f\|_p\, \|g\|_q$$

Dunque, l'applicazione

$$T : g \to l_g, \qquad l_g(f) := \int f\, g, \qquad g \in L^q$$

manda, in modo lineare, $L^q$ nel duale di $L^p$. Inoltre $T$ **é una isometria**:

$$\|g\|_q = \|T(g)\| \qquad \text{ove} \qquad \|T(g)\| := \sup_{\|f\|_p = 1} |l_g(f)| = \sup_{\|f\|_p=1} |\int f\, g|$$

Infatti, in primo luogo, $\|T(g)\| \leq \|g\|_q$. Poi,

$$\|\, |g|^{q-2}\, g\, \|_p^p = \int |\, |g|^{q-2}\, g\, |^p = \int |g|^q = \|g\|_q^q \qquad \text{e quindi}$$

$$\|T(g)\| \;\geq\; \frac{|l_g(|g|^{q-2}\;\, g)|}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|g\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|g\|_q$$

Infine, $T$ **é suriettiva**:

$$\forall l \in (L^p)', \quad \exists!\;\, g = g_l \in L^q : \qquad l(f) \;=\; \int f\, g \quad \forall f \in L^p$$

Sia infatti $V := Ker\;\, l$. Se $l \neq 0$, $V$ é sottospazio lineare chiuso proprio di $L^p$, e quindi esiste $h \in L^p : \;\; h \notin V$ . Se $h_V \neq h$ é la sua proiezione su $V$, detta $g := |h - h_V|^{p-2}(h - h_V)$ , si ha che $g \in L^q$ e

$$\int g\, v \;=\; \int |h - h_V|^{p-2}\, (h - h_V)\, v \;=\; 0 \quad \forall v \in V, \qquad \int g\, h > 0 \qquad \text{perché}$$

$\int g\, h = \int |h - h_V|^{p-2}(h - h_V)[(h - h_V) + h_V] = \int |h - h_V|^p$. Ora,

$$\forall f \in L^p : \quad l(f - \frac{l(f)}{l(h)}\, h) = 0 \;\; \text{e quindi} \;\; 0 = \int g\, (f - \frac{l(f)}{l(h)}\, h) = \int g\, f - \frac{l(f)}{l(h)} \int g\, h$$

e quindi
$$l(f) = \int \left[ \frac{l(h)}{\int\; g\, h}\;\, g \right] f$$

**Teorema (compattezza debole)** *Sia $L^p$ separabile. Allora*

$$\sup_n \|f_n\|_p < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \exists f \in L^p, \;\; n_k \to_k +\infty : \qquad f_{n_k} \rightharpoonup_k f$$

Prova. Sia $u_n$ densa in $L^p$. É facile vedere (vedi Problema 1) che $g_n := |u_n|^{p-2} u_n$ é denso in $L^q$.

Siccome $\sup_n |\int f_n g_j| < +\infty \quad \forall j$ e quindi, per ogni $j$, la successione numerica $n \to \int f_n g_j$ ha una estratta convergente, si puó estrarre da $f_n$ ( metodo diagonale di Cantor ) una $f_{n_k}$ tale che

$$l(g_j) := \lim_k \int f_{n_k} g_j \qquad \text{esiste finito} \quad \forall j$$

e quindi $$l(g) := \lim_k \int f_{n_k} g \qquad \text{esiste finito} \quad \forall g \in < g_n >$$

Inoltre, $l$ é chiaramente lineare su $< g_j >$ , e

$$|l(g)| \quad \leq \quad ( \sup_n \quad \|f_n\|_p ) \quad \|g\|_q \quad \forall g \in < g_j >$$

Dunque $l$ si estende (in modo unico) a un funzionale lineare e continuo su tutto $L^q$, che continuiamo ad indicare $l$. Dal teorema di rappresentazione:

$$\exists f \in L^p : \qquad l(g) = \int f \, g \qquad \forall g \in L^q$$

Per quanto sopra, $$\int f_{n_k} g_j \to_k l(g_j) = \int f g_j \quad \forall j$$

e (punto v) della Proposizione) ció é sufficente a garantire che $f_{n_k} \rightharpoonup_k f$.

**Lemma di Mazur** *Sia $C$ chiuso e convesso. Allora*

$$f_n \in C, \quad f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Rightarrow \qquad f \in C$$

Prova. Indicata con $f_C$ la proiezione di $f$ su $C$, risulta

$$0 \leq \int |f - f_C|^{p-2} (f - f_C) \, (f_C - f_n) \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Quindi, passando al limite, si trova $0 \leq - \int |f - f_C|^p$ e quindi $f = f_C \in C$.

# Esercizi, problemi e complementi 5

**Prova della diseguaglianza di Hanner** Siccome la diseguaglianza é simmetrica in $f, g$, e certamente vera se $\|f\|_p \ \|g\|_p = 0$, possiamo supporre $\|f\|_p \geq \|g\|_p > 0$. Dividendo per $\|f\|_p^p$ , ed avendo posto $\hat{f} := \frac{f}{\|f\|_p}$, $\hat{g} := \frac{g}{\|f\|_p}$ la diseguaglianza si riscrive,

$$(*) \quad p \in [1,2]: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \ \Rightarrow \ (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \leq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$$

$$(**) \quad p \geq 2: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \ \Rightarrow \ (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \geq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$$

Ora, $(*), (**)$ si possono derivare da

**Una diseguaglianza elementare**.

$$(\bullet) \quad 1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \leq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$$

$$(\bullet\bullet) \quad 2 < p \quad \Rightarrow \quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \geq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$$

ove $\quad a(r) := (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}, \quad b(r) := r^{1-p}\,[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}]$.

Proviamo che $(\bullet) \Rightarrow (*)$ (e $(\bullet\bullet) \Rightarrow (**)$). Da $(1+r)^p + (1-r)^p =$

$$[(1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}] + r^p\, r^{1-p}[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}] = a(r) + b(r) r^p$$

segue, posto $r = \|\hat{g}\|_p$,

$$(1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \quad = \quad \int a(r)|\hat{f}(x)|^p + b(r)|\hat{g}(x)|^p \qquad \text{perché} \qquad \int |\hat{f}|^p = 1.$$

Quindi, posto $t = \hat{f}(x)$, $s = \hat{g}(x)$, in $(\bullet)$ , otteniamo $(*)$.

**Prova di $(\bullet), (\bullet\bullet)$.** Intanto, sono vere per $t = 0$: $\forall r > 0$ si ha

$$b'(r) = \frac{p-1}{r^p}\,[\,(1-r)^{p-2} - (1+r)^{p-2}\,] > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad b'(r) < 0 \quad \text{se} \quad p > 2$$

Siccome $b(1) = 2^{p-1} < 2$ se $p < 2$ e $b(1) > 2$ se $p > 2$, si ha quindi che

$$1 < p < 2 \ \Rightarrow \ b(r) < 2 \text{ in } (0,1] \quad \text{mentre} \quad p > 2 \quad \Rightarrow \quad b(r) > 2 \text{ in } (0,1]\ .$$

Ovvero, ($\bullet$) e (($\bullet\bullet$)) valgono per $t = 0$ e si possono dunque riscrivere, dividendo per $|t|^p$ , nella forma equivalente

$$(\bullet) \quad 1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \le |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

$$(\bullet\bullet) \quad p > 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \ge |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

che infatti basta provare per ogni $\tau \ge 0$, perché la diseguaglianza é pari in $\tau$.

Posto $\quad \gamma(r,\tau) := a(r) + b(r)\tau^p, \quad r \in (0,1], \tau \ge 0$, basta provare che

$$1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{0<r\le 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \ge 0$$

$$p > 2 \quad \Rightarrow \quad \inf_{0<r\le 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \ge 0$$

É $\quad a'(r) = (p-1)[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}], \quad b'(r) = -\dfrac{a'(r)}{r^p}, \quad \gamma'(r) = a'(r)[1 - (\dfrac{\tau}{r})^p]$

$$a' < 0, \quad b' > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad a' > 0, \quad b' < 0 \quad \text{se} \quad p > 2 \quad \forall r > 0$$

In particolare, $\gamma'$ si annulla esattamente in $r = \tau$, e $\gamma(\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p$ é un massimo se $p < 2$ ed un minimo se $p > 2$. Quindi

$$\tau \le 1 \qquad \Rightarrow \qquad (\bullet), (\bullet\bullet) \qquad \text{valgono}$$

**Sia infine** $\tau > 1$. Per quanto visto, se $p < 2$ $\quad \delta := \frac{1}{\tau} < 1$ e $r \in (0,1]$ allora

$$a(r) + b(r)\delta^p \le (1+\delta)^p + (1-\delta)^p \quad \text{e quindi} \quad \tau^p a(r) + b(r) \le (1+\tau)^p + (1-\tau)^p$$

e vale la diseguaglianza opposta se $p > 2$. Basta allora provare che $\quad \forall r \in (0,1]$

$$a(r) + b(r)\tau^p \le a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p < 2$$

$$a(r) + b(r)\tau^p \ge a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p > 2$$

E ció segue dal fatto che $\quad p < 2 \quad \Rightarrow \quad a' - b' = a'(1 + \frac{1}{r^p}) < 0$ in $(0,1]$ $\quad$ e quindi

$$a(1) = b(1) = 2^{p-1} \quad \Rightarrow \quad a(r) \ge b(r) \ \ \forall r \in (0,1] \quad \Rightarrow \quad [a(r) - b(r)]\,\tau^p \ge a(r) - b(r)$$

$$\Rightarrow \quad a(r) + \tau^p b(r) \le \tau^p\, a(r) + b(r)$$

Se invece $p > 2$, é $a' - b' > 0$ in $(0,1]$, e quindi si ottiene la diseguaglianza opposta.

**Problema 1** . Provare che

$$L^p \quad \text{separabile} \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \Rightarrow \quad L^q \quad \text{separabile}$$

e, piú in generale, se $E$ é un Banach, allora

$$E' \quad \text{separabile} \qquad \Rightarrow \quad E \quad \text{separabile}$$

Provare con un esempio che l'implicazione $E$ separabile $\Rightarrow E'$ separabile é falsa.

*Suggerimento. Usare il 'fatto' seguente: se $V$ é sottospazio chiuso proprio di $E$, allora esiste un $x' \in E'$, $x' \neq 0$ tale che $x'(x)=0$ per ogni $x \in V$*

**Problema 2**. Sia $p>1$. Provare che $\|.\|_p$ é **uniformemente convessa**:

$$\|f_n\|, \|g_n\| \leq 1, \quad \|\frac{f_n+g_n}{2}\|_p \to_n 1 \quad \Rightarrow \quad \|f_n-g_n\|_p \to_n 0$$

*Suggerimento: usare la diseguaglianza di Hanner*

**Problema 3**. Sia $p>1$.. Provare che

$$f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n-f\|_p \to 0$$

*Suggerimento: usare la uniforme convessitá della norma*

**Esercizio 1** . Dare un esempio di $L^p$ non separabile.

**Esercizio 2**. Sia $f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p$, $p>1$.

(i) Provare con un esempio che $f_n$ può non convergere in alcun punto, può non convergere in misura. Può accadere che $f_n$ non abbia alcuna sottosuccessione convergente q.o.?

(ii)Provare che se $f_n(x) \to g(x)$ q.o. allora $g=f$ q.o.

(iii) Provare che se $\int |f_n|^p \to \int |f|^p$ allora $f_n$ ha almeno una sottosuccesione convergente q.o. ad $f$.

**Esercizio 3** Sia $f_n \to f$ quasi ovunque. Provare che

$$\mu(E)<+\infty \quad \Rightarrow \quad f_n\chi_E \to f\chi_E \quad \text{in misura}$$

**Esercizio 4** Sia $f_n \in L^p$ limitata: $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$ . Provare che

$f_n \to f$ q.o., oppure in misura, $\Rightarrow$ $f_n$ converge a $f$ debolmente.

*Suggerimento* Fissata $\phi \in L^1 \cap L^q$ , usare la diseguaglianza

$$| \int (f_n - f)\phi| \leq (||f_n||_p + ||f||_p)(\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\delta\}} |\phi|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |\phi|$$

**Esercizio 5** Siano $f_n \in L^p$. Provare che

(i)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(ii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iv)$f_n \to f$ q.o., $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(v)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ debolmente $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vi)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vii)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

**Esercizio 6** Sia $f \in L^p$ . Provare che

(i) $\mu(\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |f|^p \geq t\}) \leq \frac{||f||_p^p}{t}$

(ii) $t^p\mu(\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |f(x)| \geq t\}) \to 0$ al tendere di $t$ a 0 e a $+\infty$.

Provare con un esempio che tale condizione non garantisce l'appartenenza di $f$ ad $L^p$.

(iii) Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $f_n \in L^p, p > 1$, tale che $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$, e $f_n \to f, q.o.$. Provare che $f_n \to f$ in $L^q \quad \forall q < p$.

**CENNI DI SOLUZIONI**

**Problema 1 .** Sia $D$ denso in $L^p$. Sia $g \in L^q$. Allora

$$f := |g|^{q-2}g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \exists f_n \in D : \ \ f_n \to f \ \ q.o. f_n \quad \text{equidominata in} \quad L^p$$

$$\Rightarrow \quad g_n := |f_n|^{p-2} f_n \to |f|^{p-2} f = g \quad \text{equidominata in} \quad L^q$$

$$\Rightarrow \quad \{|f|^{p-2}f : \ \ f \in D\} \quad \text{é denso in} L^q$$

Sia $E'$ separabile, $\{x'_n : \ \ n \in \mathbf{N}\}$ denso in $E'$. Sia

$$x_n \in E : \qquad \|x_n\| = 1, \quad x'_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|. \qquad \text{Allora}$$

$$x'(x_n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}\|x'_n\| \leq x'_n(x_n) = x'_n(x_n) - x'(x_n) \leq \|x'_n - x'\| \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \quad \|x'\| \leq \|x' - x'_n\| + \|x'_n\| \leq 3\|x' - x'_n\| \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad x' = 0$$

Ció comporta che $V$, chiusura di $< x_n >$, é densa (altrimenti esisterebbe $x' \in E'$, non nullo che si annulla su $V$) e quindi anche l'insieme delle combinazioni lineari degli $x_n$ e a coefficenti razionali (che é un insieme numerabile) é denso in $E$.

Un esempio é dato da $l^1$, che **é separabile**:
le combinazioni lineari dei vettori $e_i, i \in \mathbf{N}, \ e_i(j) = \delta_{ij}$ sono dense in $l^1$.

Ma **il suo duale**, che é $l^\infty$, **non é separabile**:
l'insieme $\{x_{ij} = e_i + e_j : \ \ i,j \in \mathbf{N}\}$ é non numerabile e $i,j \neq l,m \Rightarrow \|x_{ij} - x_{l,m}\|_\infty = \sup_n |x_{ij}(n) - x_{l,m}(n)| = 1$ e quindi esiste una famiglia non numerabile di palle disgiunte; un insieme denso, dovendo intersecare ogni palla, é dunque necessariamente non numerabile.

**Problema 2.** Sia $\|\frac{f_n+g_m}{2}\|_p \to_n 1$. Sia d'apprima $\|f_n\|_p = \|g_n\|_p = 1$.

*Caso* $1 < p \leq 2$. Da Hanner (variante)

$$\left(\|\frac{f_n+g_n}{2}\| + \|\frac{f_n-g_n}{2}\|\right)^p + \left|\|\frac{f_n+g_n}{2}\| - \|\frac{f_n-g_n}{2}\|\right|^p \leq 2$$

Sia $\phi(t) := (1+t)^p + (1-t)^p, t \in (-1,1)$, cosicché, se $\delta := \lim\limits_k \|\frac{f_{n_k}-g_{n_k}}{2}\|$, é $\delta \in [0,1]$ e, passando al limite, $\phi(\delta) \leq 2$ e quindi $\delta = 0$ perché $\phi(0) = 2$ e $\phi'(t) > 0 \quad \forall t \in (0,1)$.

*Caso* $p \geq 2$. Da Hanner
$2^p \geq \limsup_n [\|f_n + g_n\|^p + \|f_n - g_n\|^p] = 2^p + \limsup_n \|f_n - g_n\|^p \ \Rightarrow \ \|f_n - g_n\| \to 0.$

Ora, se

$$\|f_n\|, \|g_n\| \le 1 \qquad \text{e, ugualmente} \qquad \|\frac{f_n+g_n}{2}\| \to 1$$

allora $\|f_n\|, \|g_n\| \to 1$ , perché $\|f_n\| + \|g_n\| \le r < 2 \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f_n+g_n}{2}\| \le \frac{r}{2} < 1$. Quindi $\|f_n - \frac{f_n}{\|f_n\|}\| + \|g_n - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to_n 0$ e quindi $\|\frac{f_n}{\|f_n\|} + \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to 2$ e quindi, per quanto provato sopra, $\|\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to 0$ e quindi

$$\|f_n - g_n\| \le \|f_n - \frac{f_n}{\|f_n\|}\| + \|\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| + \|g_n - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to 0$$

**Problema 3**. Se $\|f_n\| = \|f\| = 1$, allora $f_n \rightharpoonup f \quad \Rightarrow$

$$\frac{f_n+f}{2} \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad 1 \ge \liminf \|\frac{f_n+f}{2}\| \ge \|f\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

grazie all'uniforme convessitá. Ed allora, siccome $f_n \rightharpoonup f$, $\|f_n\| \to_n \|f\| \quad \Rightarrow$ $\frac{f_n}{\|f_n\|} \rightharpoonup \frac{f}{\|f\|}$ deduciamo che $\frac{f_n}{\|f_n\|} \to \frac{f}{\|f\|}$. Quindi

$$f_n - f = \|f_n\| \left(\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{f}{\|f\|}\right) + \left(\|f_n\|\frac{f}{\|f\|} - \|f\|\frac{f}{\|f\|}\right) \to_n 0$$

**Esercizio 1** . Sia $X$ insieme non numerabile, dotato della misura che conta . Gli elementi di $L^p(X,\mu)$ dati da $f = \chi_{\{x\}}, x \in X$ hanno la proprietá

$$x \ne y \quad \Rightarrow \quad \|\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$$

Dunque esiste in $L^p(X,\mu)$ un insieme non numerabile di palle disgiunte e quindi ogni insieme denso in $L^p(X,\mu)$, dovendo intersecare ognuna di queste palle, é necessariamente non numerabile.

**Esercizio 3** $f_n \to f$ quasi ovunque implica

$$0 = \mu(\{x \in E : \limsup_n |f_n(x) - f(x)| > 0\}) = \mu(\cup_j \cap_n \cup_{k\ge n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

$$\ge \mu(\cap_n \cup_{k\ge n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

e quindi, dato che $\mu(E) < +\infty$, otteniamo

$$\mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\} \le \mu(\cup_{k\ge n}\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

$$\to_n \mu(\cap_n \cup_{k\ge n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\}) = 0$$

**Esercizio 4** Sia $g \in L^1 \cap L^q$. Se $f_n \to f$ in misura, allora

$$\limsup_n |\int (f_n - f)\, g| \leq (||f_n||_p + ||f||_p) \limsup_n (\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\delta\}} |g|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |g|$$

$$\leq \delta \int |g| \quad \forall \delta > 0$$

Basta ora osservare che $L^1 \cap L^q$ é denso in $L^q$. Infatti, se $0 \leq g \in L^q$, é $g = \lim_N \sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j}$ con $\sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j} \in L^q$ e quindi anche in $L^1$. Poi, scrivi $g = g^+ - g^-$.

Se $f_n \to f$ quasi ovunque, e $g = \sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j} \in L^q$ e quindi $\mu(E_j) < +\infty$ $\forall j$ e quindi $f_n \to f$ in misura su ogni $E_j$, come sopra si ha che $\limsup_n |\int (f_n - f)\, g| = 0$.

**Esercizio 5**
(i) $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\exists f_{n_k} \to f$ q.o. Passando eventualmente di nuovo ad una sottosuccessione possiamo supporre $f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o. Dunque $f = \overline{f}$ q.o.

(ii) come in (i)

(iii) segue da (i), perché $f_n \to \overline{f}$ in $L^p$ $\Rightarrow$ $f_n \to \overline{f}$ in misura

(iv) segue dal fatto che $f_n \to \overline{f}$ in $L^p$ $\Rightarrow$ $\exists f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o.

(v) $\int f_n g \to \int f g$, $\int f_n g \to \int \overline{f} g$ $\forall g \in L^q$ $\Rightarrow$ $\int (f - \overline{f}) g = 0$ $\forall g \in L^q$ $\Rightarrow$ $f - \overline{f} = 0$ q.o.

(vi)-(vii) $f_n \to f$ debolmente $\Rightarrow$ $f_n$ limitata, fatto che, insieme a $f_n \to \overline{f}$ in misura oppure q.o. implica $f_n \to \overline{f}$ debolmente, e quindi $f = \overline{f}$ q.o. per (v)

**Esercizio 6** $\int_{\{|f(x)|\geq t\}} |f|^p \geq t^p \mu(\{|f(x)| \geq t\})$ e $|f|^p \in L^1$ $\Rightarrow$

$$\mu(\{|f(x)| \geq t\}) \to_{t\to+\infty} \mu(\{|f(x)| = +\infty\}) = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\{|f(x)|\geq t\}} |f|^p \to_{t\to+\infty} 0$$

**Esercizio 7** $\mu(X) < +\infty$, $f_n \to f, q.o.$ $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \to_n 0$. Dunque

$$\limsup_n \int |f_n - f|^q \leq \limsup_n \int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon\}} |f_n - f|^q + \epsilon^q \mu(X) \leq$$

$$\limsup_n \left[\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon\}} |f_n - f|^p\right]^{\frac{q}{p}} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\})^{\frac{p-q}{p}} + \epsilon^q \mu(X) = +\epsilon^q \mu(X)$$