Esecitazione AM3 n9-10.-A.A. 2009-2010

Esercitatore: Maristella Petralla

Integrali su superfici e forme differenziali

(1) Sia $z = x^2 + y^2$, un paraboloide che si proietta su $C:\, x^2 + y^1 \leq 1$. Calcolare la misura di tale superficie.

(2) Sia $x = f(z) = \sqrt{z}$ e condideriamo la superficie ottenuta faccendola ruotare attorno all'asse z. Calcolare la misura di tale superficie per $0 \leq z \leq 1$.

(3) Calcolare $\int_\Sigma \frac{1}{z^4} \mathrm{d}\,\sigma$ dove Σ é il grafico di $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $1 \leq z \leq 2$.

(4) ESERCIZI:

- Calcolare $\int \Sigma \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} \mathrm{d}\,\sigma$ dove

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x + \frac{\sqrt{2}}{2} y^2,\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\, y \leq \sin x \right\}.$$

- Calcolare l'area della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse delle z $x^2 + y^2 = 2\,x$, $x \leq 1$.

- Calcolare $\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}} \mathrm{d}\,\sigma$ dove

$$\Sigma : \begin{cases} x = u\, \cos v \\ y = v \\ z = \cos v \end{cases}$$

$0 \leq v \leq u$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$.

(5) Sia $\omega = x\,y\,\mathrm{d}\,x - x\,\mathrm{d}\,y$. Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ é la circonferenza unitaria di centro l'origine.

(6) Sia $\omega = (y\,\cos x - x\,y\,\sin x - \sin y)\mathrm{d}\,x + (x\,\cos x - x\,\cos y + 1)\mathrm{d}\,y$. É esatta? Calcolare una primitiva.

(7) Sia $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\,x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}\,y$. ω é chiusa? ω é esatta?

(8) Sia $\omega = 2\,x\,y^2\,z\,\mathrm{d}\,x + 2\,x^2\,y\,z\,\mathrm{d}\,y + (x^2\,y - 2\,z)\mathrm{d}\,z$.

- ω é chiusa?
- Si puó verificare che ω é esatta. Calcolare una primitiva.
- Calcolare l'integrale di ω sul segmento che congiunge $O = (0, 0, 0)$ ad $A = (1, 1, 2)$. Cosa si puó dire sull'integrale di ω su una qualsiasi curva congiungente O ad A.