Esecitazione AM3 n8.-A.A. 2009-2010

Esercitatore: Maristella Petralla

Integrali doppi e tripli, cambiamento di variabile

(1) Calcolare l'integrale

$$\int_E (x^2 - y^2)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\,y$$

dove E é il settore della circonferenza di raggio 1 compreso tra le semirette $y = x$ e $y = -x$, $x \geq 0$.

(2) Sia $E = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ (x, y) \in (0, 1)^2,\ x + y \leq z \leq x^2 + y^2 + 1 \,\}$. Calcolare la misura $m(E)$.

(3) Calcolare la misura del solido ottenuto facendo ruotare $y = \sqrt{z}$ attorno all'asse z, con $a \leq z \leq b$.

(4) ESERCIZIO: Trovare la misura dell'insieme ottenuto intersecando il cono $z^2 < x^2 + y^2$ con il cilindro $x^2 + y^2 < 2\,x$.

(5) ESERCIZIO: Calcolare il volume dell'intersezione tra il cono di equazione $x^2 + y^2 < z^2$ e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 < 2\,z$.

(6) ESERCIZIO: Calcolare $\int_E \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ dove E é la corona circolare di raggi 1 e 2.

Soluzioni

(1) Conviene passare a cordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\,\varphi \\ y = \rho\,\sin\,\varphi. \end{cases}$$

Passando in coordinate polari, si ha

$$\int_E (x^2 - y^2)\mathrm{d}\,x\ \mathrm{d}\,y = \int_F \rho^3(\cos^2\,\varphi - \sin^2\,\varphi)\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\varphi = \int_F \rho^3\cos(2\,\varphi)\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\varphi$$

dove $F := \{ (\rho, \varphi) \, : \, 0 \leq \rho \leq 1, \ \ -\frac{\pi}{4}\varphi \leq \frac{\pi}{4} \}$ é l'insieme E descritto in coordinate polari. Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_E (x^2 - y^2) \mathrm{d}\, x \ \mathrm{d}\, y &= \int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\, \rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\,\varphi) \mathrm{d}\, \varphi \\ &= \int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\, \rho \frac{1}{2} \sin(2\,\varphi)_{|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}} = \int_0^1 \rho^3 \, d\, \rho = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(2) Osserviamo che

$$\begin{aligned} m(E) &= \int_E \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, z = \int_0^1 \mathrm{d}\, y \int_0^1 (x^2 + y^2 + 1 - x - y) \mathrm{d}\, x \\ &= \int_0^1 \Big[\frac{x^3}{3} + y^2\, x + x - \frac{x^2}{2} - x\, y \Big]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}\, y = \int_0^1 \Big(\frac{1}{3} + y^2 + 1 - \frac{1}{2} - y \Big) \mathrm{d}\, y \\ &= \Big[\frac{5}{6} y + \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \Big]_0^1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(3) Abbiamo che

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a \leq z \leq b, \, 0 \leq x^2 + y^2 \leq z \}.$$

Risulta

$$m(E) = \pi \int_a^b \mathrm{d}\, z = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2).$$

(4) Introduciamo le coordinate cilindriche,

$$\begin{cases} x = \rho \, \cos\varphi \\ y = \rho \, \sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

L'insieme intersezione tra il cono e il cilindro é determinato dalle relazioni: $z^2 < \rho^2$ e $\rho^2 < 2\,\rho \, \cos\,\varphi$. Si ha dunque

$$F = \{ (\rho, \varphi, z) \, : \, \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \, 0 < \rho < 2 \, \cos\, \varphi, \, -\rho < z < \rho \}$$

e il volume di E diventa

$$\begin{aligned} \int_E \mathrm{d}\, x \ \mathrm{d}\, y \ \mathrm{d}\, z &= \int_F \rho \mathrm{d}\, \rho \, \mathrm{d}\, \varphi \, \mathrm{d}\, z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\, \varphi \int_0^{2\, \cos\, \varphi} \rho \mathrm{d}\, \rho \int_{-\rho}^{\rho} \mathrm{d}\, z \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\, \varphi \int_0^{2\, \cos\, \varphi} \rho^2 \mathrm{d}\, \rho = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \mathrm{d}\, \varphi = \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} (1 - s^2) \mathrm{d}\, s = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

(5) Introduciamo le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \ \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

Le due relazioni espresse in coordinate diventano:

$$\rho^2 \sin^2\theta < \rho^2 \cos^2\theta, \quad \rho^2 < 2\,\rho \cos\theta$$

ovvero

$$\sin^2\theta < \cos^2\theta, \quad \rho < 2 \cos\theta$$

che danno $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, $0 < \rho < 2 \cos\theta$ e $0 < \varphi < 2\,\pi$. Pertanto il volume del solido é

$$\begin{aligned} \int_E \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= \int 0^{2\,\pi}\mathrm{d}\,\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \mathrm{d}\,\theta \int_0^{2\,\cos\theta} \rho^2 \mathrm{d}\,\rho = \\ &= 2\,\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, \frac{8\,\cos^3\theta}{3} \mathrm{d}\,\theta = \frac{16\,\pi}{3} \Big[-\frac{1}{4} \cos^4\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \end{aligned}$$