Esecitazione AM3 n.5-A.A. 2009-2010

Esercitatore: Maristella Petralla

Teorema della funzione implicita e Moltiplicatori di Lagrange

(1) Discutere l'invertibilitá locale della mappa

$$F(x,y) = \Big(e^y \ \ln(1+x)\,,\,(x+1)^2\,\frac{y}{y^2+1}\Big)$$

in $(0,0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di $(0,0)$ per cui la funzione inversa G esiste. Trovare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di G rispetto a $(0,0)$.

(2) Sia

$$f(x,y,z) = \begin{cases} f_1(x,y,z) = x+y+z^2 & \text{se } x>0 \\ f_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 & \text{se } x\le 0. \end{cases} \tag{1}$$

Sia $D = D_+ \cup D_-$ dove

$$D_\pm = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ \pm x \ge 0\,\}.$$

Allora
- calcolare il massimo/minimo assoluto di $f_1(x,y,z)$ in D_+;
- calcolare il massimo/minimo assoluto di $f_2(x,y,x)$ in D_-;
- dai due punti precedenti, dedurre il valore dell'estremo superiore/inferiore di f in D. Stabilire inoltre se tale valore rappresenta il massimo/minimo assoluto di f in D indicando i punti dove venisse eventualmente assunto.

Soluzioni

(1) Abbiamo $F(0,0)=0$ e

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{e^y}{1+x} & e^y \ \ln(1+x) \\ 2(x+1)\frac{y}{y^2+1} & (x+1)^2\frac{1-y^2}{y^2+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

In particolare $DF(0,0) = \mathrm{Id}$ é una matrice 2×2 invertibile, e quindi la mappa F é localmente invertibile in $(0,0)$. Dobbiamo trovare $\rho>0$ piccolo tale che

$$\sup_{(x,y)\in B_\rho(0,0)} \|DF(x,y) - \mathrm{Id}\|_\infty \le \frac{1}{4}.$$

Dalle stime

$$\Big|\frac{e^y}{x+1}-1\Big| \le \frac{|e^y-1|+|x|}{|x+1|} \le 2(e\,\rho+\rho) \le 8\rho,$$

$$|e^y\,\ln(1+x)| \le 2e\,|x| \le 6\rho,$$

$$\Big|2(x+1)\frac{y}{y^2+1}\Big| \le 4\,|y| \le 4\rho$$

e

$$\begin{aligned}\Big|(x+1)^2\frac{1-y^2}{y^2+1}-1\Big| &\le \Big|(x+1)^2\frac{1}{y^2+1}-1\Big|+4y^2 \le \Big|\frac{1}{y^2+1}-1\Big|+2|x|+x^2+4y^2\\ &\le 2|x|+x^2+5y^2 \le 8\rho,\end{aligned}$$

segue che ρ deve essere scelto in modo tale che $\rho \le \frac{1}{32}$ e $r=\frac{\rho}{2}$. Ossia la mappa inversa G é definita da $B_{\frac{1}{64}}(0,0)$ a valori in $B_{\frac{1}{32}}(0,0)$. Poiché $DG(0,0) = DF(0,0)^{-1} = \mathrm{Id}$, lo sviluppo di Taylor di G in $(0,0)$ viene:

$$G(z,w) = (z,w) + O(z^2+w^2)$$

per $(z,w) \to (0,0)$.

(2)

- Consideriamo la funzione $f_1(x,y,z) = x+y+z^2$ su D_+. Poiché $\nabla f_1(x,y,z) = (1,1,2\,z) \neq (0,0,0)$, abbiamo che la funzione f_1 non ammette punti critici liberi all'interno di D_+. La frontiera di D_+ si spezza in due componenti:

$$\{\, x^2+y^2+z^2=1 \,\} \cup \{\, x>0 \,\}, \quad \{\, (0,y,z)\;:\; y^2+z^2 \le 1 \,\}.$$

Per quanto riguarda il primo insieme, studiamo i punti critici vincolati di f_1 sulla sfera unitaria prendendo poi in considerazione solo quelli con prima coordinata positiva. Dobbiamo quindi studiare:

(3)

$$\begin{cases} 1 = \lambda\,x \\ 1 = \lambda\,y \\ z(2-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

Dalla terza equazione otteniamo che: $z=0$ e quindi $x=y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, oppure $\lambda=2$, $x=y=\frac{1}{2}$ e quindi $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Prendendo in considerazione i punti con prima coordinata positiva, otteniamo i seguenti punti critici vincolati: $P=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ e $Q_\pm = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, su cui la funzione f_1 assume i valori:

$$f_1(P) = \sqrt{2} < f(Q_\pm) = \frac{3}{2}.$$

Per quanto riguarda il secondo insieme che compone la fronitiera di D_+, consideriamo la restrizione di f_1 su $\{\, x=0 \,\}$: $g(y,z) = y+z^2$. Studiamo poi la funzione $g(y,z)$ nel disco $2-$dimensionale $\{\, y^2+z^2 \le 1 \,\}$. É facile vedere che g non ha punti critici liberi all'interno del disco. Passiamo quindi a studiare i punti critici vincolati di g sulla sfera $2-$ dimensionale $\{ y^2 + z^2 = 1 \}$. Il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \lambda y \\ z(2-\lambda) = 0 \\ y^2 + z^2 = 1, \end{array} \right. \tag{4}$$

produce quattro soluzioni $M_\pm = (0, \pm 1, 0)$, $T_\pm = (0, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Poiché

$$f_1(M_\pm) = \pm 1, \quad f_1(T_\pm) = \frac{5}{4},$$

otteniamo che:

$$\max_{D_+} f_1 = f_1(Q_pm) = \frac{3}{2}, \quad \min_{D_+} f_1 = f_1(M_-) = -1.$$

- La funzione $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ rappresenta il quadrato della distanza dall'origine. Quindi $0 \le f_2 \le 1$ aul disco $3-$dimensionale $D_+ \cup D_-$ e $f_2(0, 0, 0) = 0$, $f_2 \le 1$ sulla sfera $\{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$. Quindi:

$$\max_{D_-} f_2 = 1, \quad \min_{D_-} f_2 = 0.$$

- Poiché $f_1 \ge -1$ in D_+, $f_2 \ge 0$ in D_-, abbiamo che $f \ge -1$ su $D_+ \cup D_-$. Lungo la successione $M_t = (t, -1, 0)$, $t \to 0^+$, abbiamo che $f(M_t) = f_1(M_t) \to f_1(M_-) = -1$. Quindi $\inf_{D_+ \cup D_-} f = -1$ e l'estremo inferiore non viene mai raggiunto. Invece il massimo assoluto risulta essere in $Q_\pm$: $\max_{D_+ \cup D_-} f = f(Q_\pm) = \frac{3}{2}$.