Appello X di AM3 - 7/9/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
La parametrizzazione $\varphi(x,y)=(x,y,1-x^2-y^2)$ di S fornisce $\varphi_x \wedge \varphi_y=(2x,2y,1)$, e il rotore del campo $V=(z^2+y,x^3,y)$ è rot $V=(1,2z,3x^2-1)$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\int_S <\text{rot } V,\nu> d\sigma &= \int_{\{x^2+y^2\le 1\}} \left[2x+4y(1-x^2-y^2)+3x^2-1\right] dxdy\\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \left[2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta(1-\rho^2)+3\rho^2\cos^2\theta-1\right]\\ &= \pi\int_0^1 \rho d\rho(3\rho^2-2)=-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

D'altra parte, per l'integrale curvilineo si ottiene che

$$\int_{\partial^+ S}\omega=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t+\cos^4 t)dt=-\frac{\pi}{4}$$

in vista di

$$\int_0^{2\pi}\cos^4 tdt=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt\ ,\quad \int_0^{2\pi}\cos^2 tdt=\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=\pi.$$

Esercizio 2
Per quanto riguarda l'esistenza, osserviamo che E è un sottinsieme chiuso di

$$[-\sqrt{8},\sqrt{8}]\times\overline{B_{\sqrt{\ln 2}}(0,0)}.$$

Risulta quindi compatto l'insieme E e per il Teorema di Weierstrass la funzione continua f ammette massimo e minimo assoluto su E.
Poiché

$$\nabla f(x,y,z)=2e^{-y^2}\left(0,-y(1+z^2),z\right),$$

i punti critici di f interni a E sono della forma $C=\{(x,0,0): x\in(-2,2)\}$. Notiamo che f è costante su C con valore 1. I punti critici vincolati di f su ∂E si trovano risolvendo

$$0=\lambda x\ ,\quad -y(1+z^2)=\lambda y\ ,\quad z=\lambda z\ ,\quad x^2+4=8e^{-y^2-z^2}.$$

Se $\lambda=0$, ottengo $y=z=0$ e quindi $x=\pm 2$. Nei punti $P_\pm=(\pm 2,0,0)$ la funzione f prende il valore $f(P_\pm)=1$. Se $\lambda\neq 0$, ottengo $x=0$ e dalla seconda e terza equazione ottengo i sottocasi: $\lambda=1$, e quindi $y=0$, $z=\pm\sqrt{\ln 2}$; $\lambda\neq 1$ e quindi $z=0$, $y=\pm\sqrt{\ln 2}$. Abbiamo ottenuto quindi i punti $Q_\pm=(0,0,\pm\sqrt{\ln 2})$ e $M_\pm=(0,\pm\sqrt{\ln 2},0)$ con valori $f(Q_\pm)=1+\ln 2$, $f(M_\pm)=\frac{1}{2}$. In conclusione, abbiamo che

$$\max_E f=f(Q_\pm)=1+\ln 2\ ,\qquad \min_E f=f(M_\pm)=\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3
Introduciamo coordinate cilindriche $x=\rho\cos\theta$, y e $z=\rho\sin\theta$ in maniera che l'insieme V risulti della forma $\{\theta\in[0,2\pi],\ 1<\rho^2+y^2<2,\ \rho^2-y^2<0,\ y>0,\ \rho\ge 0\}$. L'integrale richiesto diventa

$$\int_V \frac{x^2}{x^2+z^2}dxdydz=\pi\int_{V_0}\rho d\rho dy,$$

ove $V_0 = \{1 < \rho^2 + y^2 < 2,\ 0 \leq \rho < y\}$. Con l'ulteriore cambio di coordinate $\rho = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$, l'insieme V_0 diventa della forma $\{r \in (1, \sqrt{2}),\ \psi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]\}$ cosí da ridurre l'integrale di partenza a:

$$\int_V \frac{x^2}{x^2+z^2}dxdydz = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} r^2 \cos\psi dr d\psi = \frac{\pi}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(2\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{2}-6).$$

Osserviamo che la composizione dei due cambi di variabili puó essere descritto da un unico cambio di variabile $x = r\cos\theta\cos\psi$, $y = r\sin\psi$, $z = r\sin\theta\cos\psi$ al variare di $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, molto simile all'usale cambio di coordinate sferiche.