Appello A di AM3 - 15/6/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Da $\nabla f(x,y,z) = 3(x-3y-z)^2(1,-3,-1)$ otteniamo che i punti critici di $f(x,y,z)$ in E sono tutti e soli della forma $E \cap \{x = 3y+z\}$, ed in tali punti la funzione f vale identicamente 0. In $\partial E \setminus \{x = 3y+z\}$ studiamo i punti critici vincolati (riassorbendo $3(x-3y-z)^2 \neq 0$ nel moltiplicatore λ):

$$1 = 2\lambda x\,, \quad -3 = 4\lambda y\,, \quad -1 = 2\lambda z.$$

Allora $\lambda \neq 0$ e $x = -\frac{2}{3}y = -z$, da cui, imponendo la condizione di vincolo, si ottiene $x = \pm\sqrt{\frac{2}{13}}$. Quindi in $E \setminus \{x = 3y+z\}$ i punti critici vincolati sono

$$P_\pm = \pm\left(\sqrt{\frac{2}{13}}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{13}}, -\sqrt{\frac{2}{13}}\right)$$

con $f(P_\pm) = \pm(\frac{13}{2})^{\frac{3}{2}}$. In conclusione,

$$\max_E f = f(P_+)\,, \quad \min_E f = f(P_-).$$

Esercizio 2
Gli zeri di $F(x,y,z) = (0,0)$ in $C = \mathbb{R}^2 \times (-1,+\infty)$ sono della forma $(0,0,z)$. Quindi la mappa $g : z \in (-1,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ che associa $z \to g(z) = (0,0)$ descrive tutti gli zeri di F in C nella forma $(g(z),z)$.

Esercizio 3
L'insieme K risulta della forma $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le 1,\ x^2 + \frac{z^2}{9} \le (1-y)^2\}$. Introduco coordinate $x = \rho\cos\theta$, y e $z = 3\rho\sin\theta$, in maniera che l'insieme K si trasforma in $\{y \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi],\ \rho \le 1-y\}$. Quindi

$$\int_K x^2 dxdydz = \int_0^1 dy \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-y} 3\rho d\rho\, \rho^2\cos^2\theta = \frac{3\pi}{4}\int_0^1 (1-y)^4 dy = \frac{3\pi}{20}.$$

Esercizio 4
La curva C descrive il bordo orientato positivamente di $S = \{(x,y,z) :\ z = 1-x,\ x^2+y^2 \le 1\}$. La parametrizzazione $\varphi(x,y) = (x,y,1-x)$ fornisce $\varphi_x \wedge \varphi_y = (1,0,1)$, e per il campo $V = (y-z, z-x, x-y)$ si calcola il rotore come $\mathrm{rot}\, V = (-1-2z, 2z-2y-1, 2z-2y-1)$. Quindi otteniamo

$$\int_S <\mathrm{rot}\ V, \nu> d\sigma = -2\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} (1+y)dxdy = -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\rho d\rho = -2\pi.$$

D'altra parte, tenendo conto che molti termini danno contributo integrale zero, si ottiene che

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} [\sin^2 t - 3\cos^2 t]dt = -2\pi,$$

ove $t \in [0,2\pi] \to (\cos t, \sin t, 1-\cos t)$ parametrizza C.