Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 7 (7 Aprile 2010)
Ripasso

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Sia $x_n(k) = \dfrac{\cos^k\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}$.
   (a) Calcolare $\|x_n\|_1$ e $\|x_n\|_2$.
   (b) Studiare la convergenza di x_n in ℓ_1 e ℓ_2 e calcolarne l'eventuale limite.
2. Sia $\Phi : \ell_\infty \to \ell_\infty$ definita da $\Phi(x)(k) = e^{-k-1}x^2(k)$.
   (a) Provare che Φ non è una contrazione in ℓ_∞.
   (b) Provare che Φ è una contrazione sulla palla unitaria $X = \{x \in \ell_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$.
3. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da
   $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(\sqrt{1+x_1} - \dfrac{1}{1+x_2} - e^{-y_1} + \cos y_2, \log(\cosh x_1) - \dfrac{\sin(x_1 x_2)}{1+y_1^2} + \arctan y_2\right)$.
   (a) Provare che $\exists\, r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(x_1, x_2, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r((0,0))$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g.
4. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y) = \left(\sin(xy) + x\cos y, e^{x+y} - \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\right)$.
   (a) Provare che $\exists\, r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v)$ $\forall (u,v) \in B_r((0,0))$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g.
5. Siano $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z > 0\right\}$ e $f(x,y,z) = x^2y^2 + \log z$.
   (a) Dire se f è superiormente e/o inferiormente limitata su E.
   (b) Calcolare $\sup\limits_E f$ e $\inf\limits_E f$ specificando se si tratta rispettivamente del massimo e del minimo ed eventualmente i punti in cui sono raggiunti.
6. Sia $\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$ per $t \in [0, \pi]$
   (a) Stabilire se γ è una curva regolare.
   (b) Calcolarne la lunghezza.
   (c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt[3]{|xy|}\, d\ell$.
7. Sia $x_n(k) = \dfrac{1 + \arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)}{k^2}$. Discutere la convergenza di x_n in ℓ_2 e ℓ_1.