Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 6 (31 Marzo 2010)
Massimi e minimi vincolati, curve

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Sia $\gamma(t) = \left(e^{-3t}\cos(4t), e^{-3t}\sin(4t)\right)\ t \in [0, +\infty)$.
   Mostrare che γ è una curva regolare e calcolarne la lunghezza.

2. Sia $\gamma(t) = (\cos(t), 2\sin(t))\ t \in [0, \pi]$.
   Mostrare che γ è regolare e calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{1+3x^2}d\ell$.

3. Sia γ la curva ottenuta intersecando il cilindro di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ con il piano di equazione $y + z = 0$;
   (a) Provare che γ è una curva regolare e calcolarne la lunghezza.
   (b) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma xyz + \frac{|y|}{2x^2+y^2+2z^2}\ d\ell$.

4. Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola di equazione $y = \dfrac{x^2}{2}\ x \in [-1, 1]$.

5. Siano $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ e $f(x, y, z) = xy^2z^3$.
   Calcolare $\sup\limits_E f$ e $\inf\limits_E f$ specificando se si tratta del massimo e/o del minimo ed eventualmente i punti in cui vengono raggiunti.

6. Siano $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ e $f(x, y, z) = \dfrac{y^2+1}{1+x^2+z^2}$.
   Calcolare $\sup\limits_E f$ e $\inf\limits_E f$ specificando se si tratta del massimo e/o del minimo ed eventualmente i punti in cui vengono raggiunti.

7. Trovare, se esistono, i cilindri di volume massimo tra quelli inscritti in una sfera di raggio 1.

8. Siano $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0\right\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^4 - z$.
   Calcolare $\sup\limits_E f$ e $\inf\limits_E f$ specificando se si tratta del massimo e/o del minimo ed eventualmente i punti in cui vengono raggiunti.

9. Sia $\|(x, y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$ per $p = 2, 4$.
   Calcolare $\max\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x, y)\|_4$ e $\min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x, y)\|_4$ e determinare la costanti α, β ottimali per cui $\alpha\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_4 \leq \beta\|(x, y)\|_2$.