Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

TUTORATO NUMERO 3 (10 MARZO 2010)
TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA, SPAZI METRICI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Per ognuna delle seguenti funzioni, stabilire se in un intorno del punto indicato è possibile scrivere l'insieme di livello $\{F = 0\}$ come grafico di una funzione $y = g(x)$. Fornire inoltre una stima dell'intorno di definizione della funzione g e, supponendo che sia di classe C^2, determinarne lo sviluppo di serie di Taylor al secondo ordine:
   (a) $F(x, y) = \arctan(x) + e^{-y} - \cos(xy)$ in $(0, 0)$.
   (b) $F(x, y) = e^{2y} - \sin(x + y) - 1$ in $(0, 0)$.
   (c) $F(x, y) = xy^2 + y + \sin(xy) + \dfrac{e^x - 1 - x}{2}$ in $(0, 0)$.
   (d) $F(x_1, x_2, y) = y^3 - \cosh(x_1x_2)$ in $(0, 0, 1)$.
   (e) $F(x_1, x_2, y) = \log(1 + x_1x_2y) - \arctan(x_1x_2) + e^{(x_1^2+x_2^2)y} - y$ in $(0, 0, 1)$.

2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y_1, y_2) = \left(\dfrac{x + y_2}{1 + x + y_1^2}, \dfrac{x + y_1}{1 + x + y_2^2}\right)$.
   (a) Provare che $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C(B_r(0), B_\rho((0, 0)))$ tale che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0$ $\forall x \in B_r(0)$.
   (b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.
   (c) Supponendo che g sia di classe C^1, determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g.

3. Studiare la convergenza in ℓ_p delle seguenti successioni:
   (a) $x_n(k) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n(k+1)}}\right)}{\sqrt{k+1}}$. (b) $x_n(k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2^k + 1)^j}$.

4. Mostrare che l'equazione $\arctan\left(1 + \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = x$ ha un'unica soluzione in $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Mostrare che la successione definita da $\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}+1} \end{cases}$ converge a $\sqrt{2}$ per qualsiasi scelta di $a \geq 1$.