Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

TUTORATO NUMERO 2 (3 MARZO 2010)
SPAZI NORMATI, CONTRAZIONI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Sia $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \in C([0,1])$. Calcolare $\|f_n\|_\infty$ e $\|f_n\|_1$ e dedurre che le due norme non sono equivalenti.

2. Sia $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}} \sin^2 x$. Mostrare che f_n converge in $(C([0,\pi]), \|\cdot\|_1)$.

3. Sia $x_n(k) = \dfrac{n}{ne^k + 1}$. Mostrare che x_n converge in ℓ^p $\forall p \geq 1$.

4. Sia $x_n(k) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!(2n)^{k+1}}$. Calcolare $\|x_n\|_1$ e stabilire se x_n converge in ℓ^1.

5. Sia $x_n(k) = \dfrac{e^{-\frac{k}{n}}}{n}$. Calcolare $\|x_n\|_1$, $\|x_n\|_2$ e studiare la convergenza di x_n in ℓ_1 e in ℓ_2.

6. Sia $x_n(k) = \dfrac{k^2 + nk + 2k + n}{(k^2+1)(n+k)}$.
   (a) Provare che $x_n \in \ell_2$ e $x_n \notin \ell_1$.
   (b) Mostrare che x_n converge in ℓ^2 ad una successione $x \in \ell_2$.
   (c) Provare che $x_n - x \in \ell_1$ e che $x_n - x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in ℓ_1.

7. Sia $x_n(k) = \dfrac{n \log\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{1+k^2}}$. Mostrare che $x_n \in \ell^1$ e converge in ℓ^1.
   Suggerimento: se $x \geq 0$, $|\log(1+x) - x| \leq \dots$

8. Sia $x_n = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, 0, \dots\right)$.
   (a) Mostrare che $x_n \in \ell^1$.
   (b) Mostrare che x_n è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$.
   (c) Mostrare che x_n rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ non converge ad alcun elemento di ℓ^1 e dedurne che $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ non è completo.

9. Mostrare che $\Phi : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ definita da $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^3 f(t)} dt$ è una contrazione su $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

10. Sia $X = \{f \in C([0,1]) : 0 \leq f(x) \leq 1 \; \forall x\}$ e $\Phi : X \to C([0,1])$ definita come $\Phi(u)(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^x u^2(t) dt$.
    (a) Mostrare che X è un sottoinsieme chiuso di $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.
    (b) Mostrare che $\Phi(X) \subseteq X$ e che Φ è una contrazione.
    (c) Determinare tutti i punti fissi di Φ.