Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 1 (24 Febbraio 2010)
Ripasso

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Dimostrare che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è differenziabile nell'origine ma non è di classe C^1.

2. Siano $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ e $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tali che $f(x, g(x)) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che se $g(0) = 0$, $\nabla f(0,0) = (0,2)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1$ allora g ha un massimo relativo in 0.

3. Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

   (a) $|\sin x| \leq |x|$

   (b) $|1 - \cos x| \leq \dfrac{x^2}{2}$

   (c) $|x - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{6}$

   (d) $|\tan x| \leq 2|x|$ se $|x| \leq 1$

   (e) $|\arctan x| \leq |x|$

   (f) $|e^x - 1| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$

   (g) $|\sinh x| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$

   (h) $|\log(1+x)| \leq 2|x|$ se $|x| \leq \dfrac{1}{2}$

4. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

   (a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, |x| + |y| \geq 1\right\}$

   (b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq \sqrt{3}|x|\right\}$

   (c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - y^2| \leq 1\right\}$

   (d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \dfrac{\sin y}{y}, y^2 \leq \pi^2\right\}$

5. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y\right\}$

   (b) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$

   (c) $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,|y|,|z|\} \leq 1\right\}$

   (d) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\right\}$

   (e) $I = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 + z^2 = 1\right\}$

6. Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{cosx}{e^{2x}}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \sqrt{1 - \cos x}\, dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx$

   (d) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2 - x - 3}{x^4 - 9}\, dx$