Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

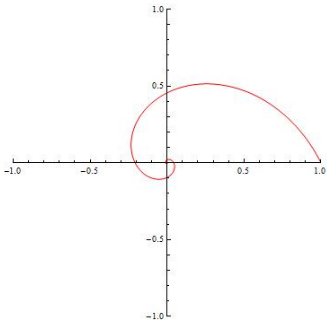
A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 6 (31 Marzo 2010)
Massimi e minimi vincolati, curve

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

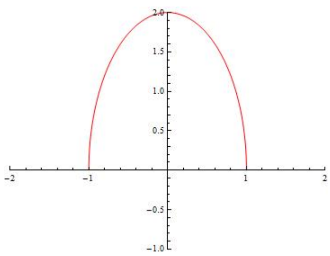
1. $\gamma(t) = \left(e^{-3t}\cos(4t), e^{-3t}\sin(4t)\right)\ t \in [0, +\infty)$.



$\dot\gamma\,(t) = \left(-3e^{-3t}\cos(4t) - 4e^{-3t}\sin(4t), -3e^{-3t}\sin(4t) + 4e^{-3t}\cos(4t)\right)$
$|\,\dot\gamma\,(t)|^2 = 9e^{-6t}\cos^2(4t) + 16e^{-6t}\sin^2(4t) + 24e^{-6t}\cos(4t)\sin(4t) + 9e^{-6t}\sin^2(4t) + +16e^{-6t}\cos^2(4t) - 24e^{-6t}\cos(4t)\sin(4t) = 9e^{-6t} + 16e^{-6t} = 25e^{-6t}$.
$|\,\dot\gamma\,(t)| = 5e^{-3t} \neq 0\ \forall\, t$ quindi γ è una curva regolare.
Per definizione la lunghezza di γ è data da

$$\ell(\gamma) = \int_0^\infty |\,\dot\gamma\,(t)|\,dt = \int_0^\infty 5e^{-3t}\,dt = -\frac{5}{3}\,e^{-3t}\Big|_0^\infty = \frac{5}{3}$$

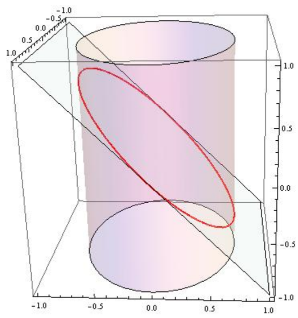
2. $\gamma(t) = (\cos(t), 2\sin(t))\ t \in [0, \pi]$.



$\dot\gamma\,(t) = (-\sin(t), 2\cos(t)) \implies |\,\dot\gamma\,(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{1 + 3\cos^2(t)} \neq 0\ \ \forall\ \ t$
quindi γ è una curva regolare.
Se $f(x,y) = \sqrt{1+3x^2}$ allora per definizione abbiamo che

$$\int_\gamma f(x,y)d\ell = \int_0^\pi f(\gamma(t))\,|\,\dot\gamma\,(t)|dt = \int_0^\pi \sqrt{1+3\cos^2(t)}\,|\,\dot\gamma\,(t)| = \int_0^\pi (1+3\cos^2(t))\,dt =$$
$$= \pi + 3\int_0^\pi \cos^2(t)\,dt = \pi + 3\int_0^\pi \frac{\cos(2t)+1}{2}dt = \pi + \frac{3}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^\pi + \pi\right) = \pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi.$$

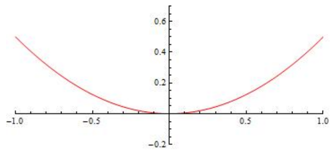
3. Sia γ la curva ottenuta intersecando il cilindro con base ellittica $x^2+2y^2=1$ e il piano $y+z=0$.



Una parametrizzazione di γ è $\gamma(t)=\left(\cos(t), \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\right)$ con $t\in[0,2\pi]$.
(a) $\dot{\gamma}\,(t)=\left(-\sin(t), \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow |\,\dot{\gamma}\,(t)|=\sqrt{\sin^2(t)+\frac{1}{2}\cos^2(t)+\frac{1}{2}\cos^2(t)}=1.$
Dunque γ è una curva regolare e $\ell(\gamma)=\displaystyle\int_0^{2\pi}|\,\dot{\gamma}\,(t)|\,dt=\int_0^{2\pi}1\,dt=2\pi.$

$$\text{(b)} \int_\gamma xyz+\frac{|y|}{2x^2+y^2+2z^2}\,d\ell=\int_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\cos(t)\sin^2(t)+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|\sin(t)|}{2\cos^2(t)+\frac{1}{2}\sin^2(t)+\sin^2(t)}dt=$$
$$=-\frac{1}{6}\sin^3(t)\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{|\sqrt{2}\sin(t)|}{4\cos^2(t)+3\sin^2(t)}dt=\int_0^{2\pi}\frac{|\sqrt{2}\sin(t)|}{3+\cos^2(t)}dt=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}dt$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{1+\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt\;=\;-\frac{2\sqrt{6}}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+s^2}\,ds\;=\;\frac{2}{3}\sqrt{6}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+s^2}\,ds\;=$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{6}\arctan s\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{6}\,\pi$$

4. Una parametrizzazione dell'arco di parabola in questione è $\gamma(t)=\left(t, \frac{t^2}{2}\right)$ $t\in[-1,1]$.



$\dot{\gamma}\,(t)=(1,t)\Longrightarrow|\,\dot{\gamma}\,(t)|=\sqrt{1+t^2}$ quindi

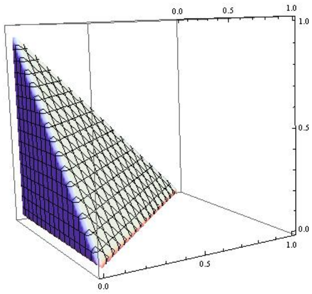
$$\ell(\gamma)=\int_{-1}^{1}|\,\dot{\gamma}\,(t)|\,dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt=2\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=\int_0^{\text{arcsinh}1}\sqrt{1+\sinh^2(t)}\,\cosh(t)dt$$
$$=\int_0^{\text{arcsinh}1}\cosh^2(t)dt=2\int_0^{\text{arcsinh}1}\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}dt=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{4}+t\,\Big|_0^{\text{arcsinh}1}=$$
$$=\frac{1}{4}e^{2\text{arcsinh}1}-\frac{1}{4}e^{-2\text{arcsinh}1}+\text{arcsinh}1.$$

A questo punto ricordiamo che $t=\sinh s\Rightarrow e^s-e^{-s}=2t\Rightarrow e^{2s}-1=2te^s\Rightarrow e^{2s}-2te^s-1=0\Rightarrow e^s=t+\sqrt{1+t^2}\Rightarrow s=\log(t+\sqrt{1+t^2})$ quindi $\text{arcsinh}\,t=\log(t+\sqrt{1+t^2})$.
In particolare $\text{arcsinh}1=\log(1+\sqrt{2})$ dunque

$$\ell(\gamma)=\frac{1}{4}e^{2\log(1+\sqrt{2})}-\frac{1}{4}e^{-2\log(1+\sqrt{2})}+\log(1+\sqrt{2})=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}-\frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2}+\log(1+\sqrt{2})$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4(3+2\sqrt{2})} + \log(1+\sqrt{2}) = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} + \log(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})$$

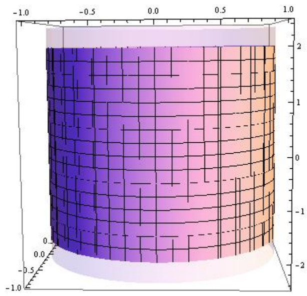
5. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$ $\quad f(x,y,z) = xy^2z^3$.
   E è il tetraedro in $\mathbb{R}^3$ di vertici $(0,0,0)$,$(1,0,0)$,$(0,1,0)$,$(0,0,1)$.



I possibili punti di massimo/minimo di f su E o sono interni ad E e quindi punti in cui $\nabla f = 0$ oppure si trovano su ∂E. $\nabla f(x,y) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ si annulla solo in punti di ∂E quindi non ci sono punti critici interni ad E. Cerchiamo ora i massimi e i minimi su ∂E. ∂E è l'unione delle quattro facce del tetraedro. Su tre delle quatto facce f è identicamente nulla pertanto dobbiamo studiare f solo sulla faccia $\{x+y+z = 1, x,y,z > 0\}$. I punti critici di f su questa faccia sono soluzioni di $\begin{cases} y^2z^3 = \lambda \\ 2xyz^3 = \lambda \\ 3xy^2z^2 = \lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases}$.

Dalle prime due equazioni si ottiene che $y^2z^3 = 2xyz^3 \Rightarrow yz^3(y-2x) = 0$. Dato che $x,y,z > 0$ abbiamo $y = 2x$. In modo analogo dalla seconda e dalla terza equazione si trova $xyz^2(2z-3y) = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{2}y = 3x$. Sostituendo le due relazioni trovate nell'ultima equazione troviamo che $x + 2x + 3x = 1$ cioè $6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}$ e $z = \frac{1}{2}$. L'unica soluzione del sistema è il punto $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Dato che $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{432}$ e che f è nulla sulle altre tre facce abbiamo $\max_E f = \dfrac{1}{432}$ e $\min_E f = 0$.

6. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\quad f(x,y,z) = \dfrac{y^2+1}{1+x^2+z^2}$.

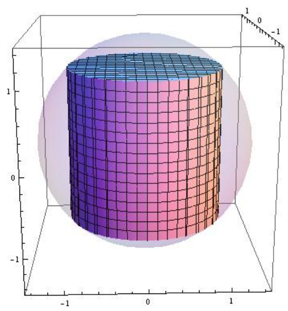


Per prima cosa notiamo che $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $(0,0,n) \in E$ e $f(0,0,n) = \dfrac{1}{1+n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dato che $f(x,y,z) > 0$ ne concludiamo che $\inf_E f = 0$ e che questo inf non è un minimo.

Inoltre notiamo che se $(x_n, y_n, z_n) \in E$ e $\|(x_n, y_n, z_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ allora $|z_n| \to \infty$ e $|x_n|, |y_n| \leq 1$ quindi $0 < f(x,y_n,z_n) \leq \dfrac{2}{z_n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Questo ci permette di dire che f ha un massimo in E. Cerchiamo dunque il massimo di f su E.

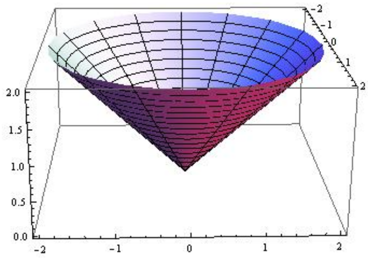
$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{2x(1+y^2)}{(1+x^2+z^2)^2}, \frac{2y}{1+x^2+z^2}, -\frac{2z(1+y^2)}{(1+x^2+z^2)^2} \right) = (0,0,0) \Longleftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ quindi $(0,0,0)$ è l'unico punto critico di f interno ad E.
Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti critici vincolati di f su ∂E sono soluzioni del sistema
$\begin{cases} -\frac{2x(1+y^2)}{(1+x^2+z^2)^2} = 2\lambda x \\ \frac{2y}{1+x^2+z^2} = 2\lambda y \\ -\frac{2z(1+y^2)}{(1+x^2+z^2)^2} = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -\frac{2x(1+y^2)}{(1+x^2)^2} = 2\lambda x \\ \frac{2y}{1+x^2} = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ Dalla terza equazione ricaviamo che $y = 0$ oppure $\lambda = \frac{1}{1+x^2}$. Se $y = 0$ allora $x = \pm 1$. Se invece $\lambda = \frac{1}{1+x^2}$ allora sostituendo nella seconda equazione troviamo $-\frac{2x(1+y^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^2} \Longrightarrow -\frac{x(1+y^2)}{1+x^2} = x \Longrightarrow -x(1+y^2) = x(1+x^2) \Longrightarrow x(x^2+y^2+2) = 0 \Longrightarrow 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$ e $y = \pm 1$. Le soluzioni del sistema sono dunque i punti $(\pm 1,0,0)$ e $(0,\pm 1,0)$.
$f(\pm 1,0,0) = \frac{1}{2}$, $f(0,\pm 1,0) = 2$ e $f(0,0,0) = 1$ quindi $\sup_E f = \max_E f = 2$ ed è assunto nei punti $(0,\pm 1,0)$.

7. A meno di rotazioni possiamo supporre che il cilindro abbia asse di simmetria parallelo all' asse z.



Dato che il cilindro è inscritto nella sfera unitaria se chiamiamo x il raggio e y l'altezza del cilindro abbiamo che $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$. Il volume del cilindro è $\pi x^2 y$. Dobbiamo quindi massimizzare la funzione $f(x,y) = \pi x^2 y$ nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ (si noti che l'insieme è compatto e che f è continua quindi esiste sicuramente almeno un punto di massimo). Se $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$ per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti di massimo per f su E si ottengono come soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$
cioè $\begin{cases} 2\pi xy = 2\lambda x \\ \pi x^2 = \lambda \frac{y}{2} \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$
Dalla prima equazione ricaviamo che $2x(\pi y - \lambda) = 0$ da cui $x = 0$ o $\lambda = \pi y$. Se $x = 0$ allora $y = \pm 2$ mentre se $\lambda = \pi y$ nella seconda equazione otteniamo $2x^2 = y^2$ quindi sostituendo nel vincolo $x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Le soluzioni del sistema sono dunque i punti $(0,\pm 2), (\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}), (-\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}})$. Dato che il raggio e l'altezza non possono essere negativi gli unici punti che ci interessano sono $(0,2)$ e $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$. $f(0,2) = 0$ e $f(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$ quindi il cilindro di volume massimo è quello di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}}$ e altezza $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

8. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 = 0, z \geq 0\} \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^4 - z$.



Notiamo $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $(n,0,n) \in E$ è una successione di punti di E tali che $f(n,0,n) = n^2 - n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ quindi $\sup_E f = +\infty$. Inoltre in E $f(x,y,z) = z^2 - y^2 + y^4 - z = z^2 - z + y^2(y^2-1) \geq z^2 - z - 1$ quindi se $(x_n, y_n.z_n) \in E$ è tale che $\|(x_n,y_n,z_n)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ allora $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e quindi $f(x_n,y_n,z_n) \geq z_n^2 - z_n + 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Dunque f è una funzione coerciva in E e dunque ha un minimo in E. Se $g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti di minimo di f su E diversi da $(0,0,0)$ (punto in cui $\nabla g = 0$) sono tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 4y^3 = 2\lambda y \\ -1 = -2\lambda z \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(2y^2-\lambda) = 0 \\ -1 = -2\lambda z \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $x = 0$ o $\lambda = 1$.

Se $x = 0$ allora il sistema diventa $\begin{cases} 2y(2y^2-\lambda) \\ -1 = -2\lambda z \\ y^2 = z^2 \end{cases}$ dalle ultime due equazioni ricaviamo che $y = \pm z \neq 0$ quindi dalla prima che $\lambda = 2y^2 = \lambda$. La seconda equazione diventa quindi $1 = 4y^2 z \Longrightarrow z = \frac{1}{4y^2}$. L'ultima equazione dice quindi che $y^2 = \frac{1}{16y^4} \Longrightarrow y^6 = \frac{1}{16} \Longrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ e $z = \frac{1}{4y^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Se $\lambda = 1$ allora abbiamo $\begin{cases} 2y(2y^2-1) = 0 \\ 1 = 2z \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(2y^2-1) = 0 \\ z = \frac{1}{2} \\ x^2+y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ Dalla prima equazione troviamo $y = 0$ o $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nel primo caso dall'ultima equazione abbiamo $x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$ mentre nel secondo caso $x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4}$ il che non è possibile.

I possibili punti di minimo per f su E sono quindi $(\pm\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $(0, \pm\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ e $(0,0,0)$.
$f(\pm\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(0,\pm\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{\sqrt[3]{4}}) = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ e $f(0,0,0) = 0$ dunque $\inf_E f = \min_E f = -\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ ed è assunto nei punti $(0,\pm\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$.

9. Siano $f(x,y) = \|(x,y)\|_4^4 = x^4+y^4$ e $g(x,y) = \|(x,y)\|_2^2 - 1 = x^2+y^2-1$. Notiamo che $\max_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = \sqrt[4]{\max_{\{g=0\}} f}$ e $\min_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = \sqrt[4]{\min_{\{g=0\}} f}$. Calcoliamo dunque $\max_{\{g=0\}} f$ e $\min_{\{g=0\}} f$. Per il principio dei molitiplicatori di Lagrange i punti di massimo /minimo per f su $\{g=0\}$ sono soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda\nabla g \\ g = 0 \end{cases}$ cioè

$$\begin{cases} 4x^3 = 2\lambda x \\ 4y^3 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(2x^2-\lambda) = 0 \\ y(2y^2-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Se $x = 0$ allora $y = \pm 1$. Se $y = 0$ allora $x = \pm 1$. Se $x, y \neq 0$ allora $\lambda = 2x^2 = 2y^2$ cioè $x^2 = y^2$ quindi sostituendo nell'ultima equazione troviamo $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Le soluzioni del sistema sono dunque i punti $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.

$f(\pm 1,0) = f(0,\pm 1) = 1$ e $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$ dunque $\max\limits_{\{g=0\}} f = 1$ e $\min\limits_{\{g=0\}} f = \dfrac{1}{2}$ da cui si ricava che $\max\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = \sqrt[4]{\max\limits_{\{g=0\}} f} = 1$ e $\min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = \sqrt[4]{\min\limits_{\{g=0\}} f} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
Cerchiamo ora le costanti ottimali α, β tali che $\alpha\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_4 \leq \beta\|(x,y)\|_2$. Notiamo che $\alpha\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_4 \ \forall\ (x,y) \Longrightarrow \alpha \leq \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4$. D'altra parte $\forall\ (x,y) \neq (0,0)\ \|\dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|_2}\|_4 \geq \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 \Rightarrow \|(x,y)\|_2 \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 \leq \|(x,y)\|_4$ quindi siccome α è la costante ottimale si deve avere $\alpha \geq \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4$. Dunque $\alpha = \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. In modo analogo $\beta = \max\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = 1$.