

**Esercitazione AM2 n. 4 - A.A. 2009-2010 - 16/11/09**

**Serie di potenze e serie di funzioni**

Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{1+x^{2n}}$ .

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(3x)^n}$

3.  $\sum_{n=2}^{\infty} n e^{-n(x^2+x+1)}$ .

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) e^{-nx^2}$ .

5.  $\sum_{n=2}^{\infty} (x^2 - 1)^n \log \left( 1 + \frac{x^2-1}{n} \right)$ .

6.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + (\log n)^x}$ .

Studiare le seguenti serie di potenze:

7.  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n}) x^n$ .

8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi}{4} \right) x^{2n}$ .

9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2-n}}{n}$ .

10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}}$ .

### Soluzioni Esercitazione AM2 n. 4 - 16/11/09

1. Convergenza puntuale in  $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (0, +\infty)$ , convergenza totale in  $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$  con  $a < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $b > 0$ .
2. Convergenza puntuale in  $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ , convergenza totale in  $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$  con  $a > \frac{1}{3}$ .
3. Convergenza totale su tutto  $\mathbb{R}$  perché  $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq ne^{-\frac{3}{4}n}$ .
4. Convergenza puntuale ed assoluta per ogni  $x \neq 0$ . Convergenza totale per  $|x| \geq \delta$  per ogni  $\delta > 0$ .
5. Convergenza puntuale per  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , assoluta per  $x \neq 0$ . Convergenza totale per  $\delta \leq |x| \leq \sqrt{2} - \delta$  per ogni  $\delta > 0$ .
6. Convergenza puntuale in  $(0, \infty)$ , assoluta per  $x > 1$ . Convergenza totale in  $[a, +\infty)$  per ogni  $a > 1$ .
7. Il raggio di convergenza é  $R = \frac{1}{9}$ . Convergenza puntuale in  $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ , totale nei compatti contenuti.
8. Il raggio di convergenza é  $R = 1$ . Convergenza puntuale in  $(-1, 1)$ , totale nei compatti contenuti.
9. Il raggio di convergenza é  $R = 1$ . Convergenza puntuale in  $(-1, 1)$ , totale nei compatti contenuti.
10. Il raggio di convergenza é  $R = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Convergenza puntuale in  $(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ , totale nei compatti contenuti.