

**Esercitazione AM2 n. 2 - A.A. 2009-2010 - 12/10/09**

**Differenziabilità di funzioni di più variabili**

1. Mostrare che è continua ma non differenziabile nell'origine la funzione

$$f(x, y) \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Verificare che la funzione  $f(x, y) = |xy|^\alpha$  con  $\alpha > 0$  è differenziabile nell'origine se e solo se  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

3. Stabilire se è continua, derivabile, differenziabile in  $(0, 0)$  la funzione  $f(x, y) = \frac{1 - \cos(xy)}{x^4 + y^4}$ .

4. Stabilire se ammette un prolungamento continuo, derivabile o differenziabile nell'origine la funzione  $f(x, y) = x + \log\left(\frac{x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}\right)$ .

5\*. Stabilire dove è differenziabile la funzione

$$f(x, y) \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & y = 0 \end{cases}$$

6. Studiare per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$  la continuità, differenziabilità, derivabilità e continuità delle derivate parziali della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin \frac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

### Soluzioni Esercitazione AM2 n. 2 - 12/10/09

1. Dalla disuguaglianza  $2|xy| \leq (x^2 + y^2)$  segue subito la continuità in  $(0, 0)$ . Notiamo che  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  dato che  $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$  per ogni  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Però  $f$  non è differenziabile nell'origine perché non esiste  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2}$  (tale limite è per esempio 0 nella direzione  $(h, k) = (0, t)$  e vale  $\frac{1}{2}$  nella direzione  $(h, k) = (t, t)$ ).

2. Poiché  $f$  è identicamente nulla sugli assi coordinati, abbiamo  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ . Bisogna quindi calcolare il  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ . Nelle direzioni  $(h, k) = (t, t)$  tale limite vale  $\infty$  per ogni  $\alpha < \frac{1}{2}$  e vale  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  per  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Quindi  $f$  non è differenziabile per tali valori di  $\alpha$ , mentre per  $\alpha > \frac{1}{2}$  si ha  $\frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq (h^2 + k^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$ , da cui  $f$  è differenziabile nell'origine.

3. Ricordando che  $1 - \cos t = \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ , facendo il limite sulle rette  $y = mx$  si vede subito che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{m^2}{2(1+m^4)}$ , da cui  $f$  non è continua né differenziabile nell'origine. Però essendo  $f$  identicamente nulla sugli assi coordinati,  $f$  è derivabile parzialmente e  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ .

4. Notiamo che  $f(0, y) \equiv \log 3$  mentre  $f(x, 0) \equiv 0$ , quindi  $f$  non ammette prolungamento continuo né tantomeno differenziabile in  $(0, 0)$ . Ponendo  $f(0, 0) = \log 3$ , otteniamo che  $f_x \equiv 1$  esiste continua anche in  $(0, 0)$ , mentre ponendo  $f(0, 0) = 0$  è  $f_y \equiv 0$  ad esistere ed essere continua anche in  $(0, 0)$ . Pertanto,  $f(x, y)$  è derivabile con continuità rispetto ad una sola delle variabili in base al prolungamento scelto.

5. La funzione è chiaramente differenziabile per ogni  $y \neq 0$ , e risulta continua e differenziabile in  $(x, 0)$  solo se  $x > 0$ . Infatti ricordando che  $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \pm \frac{\pi}{2}$  per  $t \gtrless 0$  e passando a coordinate polari,  $f(\rho, \vartheta) = \frac{\pi}{2} - \vartheta$  per  $\vartheta \neq 0, \pi$  e  $f(\rho, 0) = f(\rho, \pi) = \frac{\pi}{2}$ , che è continua e differenziabile solo per  $\rho \neq 0$  e  $\vartheta \neq \pi$ .

6. Ponendo  $t = |x|$ , si verifica facilmente che la funzione di una variabile  $f(t) = t^2 \sin \frac{1}{t}$ ,  $f(0) = 0$  è continua e derivabile su tutto

$\mathbb{R}$  cosicché  $f(x)$  risulta continua, derivabile e differenziabile per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$  con  $f_{x_i}(0) = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ . Però le derivate parziali di  $f$  non sono continue in  $x = 0$ : infatti  $f_{x_i} = 2x_i \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x_i}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}$  non ha limite per  $x \rightarrow 0$ .